MATERIAL DIDÁTICO
Para a EJA

Matemática

INSTITUTO FEDERAL
Goiás
Câmpus Valparaíso

Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda

MATERIAL DIDÁTICO

Para a EJA

Matemática

INSTITUTO FEDERAL
Goiás
Câmpus
Valparaíso

MATEMÁTICA
Prof. Dr. Bruno de Paula Miranda
Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2011). Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2013). Doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (2018). Atualmente, é professor no Instituto Federal de Goiás.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS

CÂMPUS VALPARAÍSO

GERÊNCIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO

EQUIPE

REITORA DO INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS
Oneida Cristina Gomes Barcelos Irigon

PRÓ-REITOR DE EXTENSÃO
Willian Batista dos Santos

DIRETOR-GERAL DO CÂMPUS VALPARAÍSO
Reginaldo Dias dos Santos

GERENTE DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
Danielle Pereira Da Costa

COORDENADOR
João Oliveira Ramos Neto

DOCENTES
Bruno de Paula Miranda
Flávio Olímpio Sanches Neto
João Oliveira Ramos Neto
Naiá Marjore Marrone Alves Oliveira
Nívia Maria Assunção Costa

DISCENTES
Ana Clara Da Silva Amaral
Arthur Santos Barreira Lima de Sá
Igor Alves Ribeiro
Luiza Da Silva Amorim
Thayná Das Graças Silva Peres
Gustavo Rodrigues Ribeiro
Karol Vieira Noronha
Matheus De Oliveira Azevedo
Nathália Rebeka Rodrigues Mesquita

CAPA E DIAGRAMAÇÃO
Juliana Leão Borba Lins

Valparaíso de Goiás, 2025

INTRODUÇÃO

A EJA, Educação de Jovens e Adultos, representa uma porta de oportunidades fundamental para aqueles que não tiveram a chance de concluir seus estudos na idade regular. No Brasil, essa modalidade de ensino tem uma longa história, marcada por desafios e conquistas na busca por inclusão e justiça educacional.

Ela se configura como uma política pública essencial para a elevação do nível de escolaridade da população e para a promoção do desenvolvimento social e econômico do país. Dentro desse universo da EJA, o Ensino Médio assume um papel crucial, preparando os estudantes para a continuidade dos estudos em nível superior ou para o ingresso no mundo do trabalho. Já a oferta de cursos técnicos de nível médio pelos Institutos Federais na modalidade EJA representa uma via poderosa de qualificação profissional, conectando a educação com as demandas do mercado e oferecendo aos jovens e adultos a chance de construir uma carreira promissora. Esses cursos aliam a formação geral do Ensino Médio com o desenvolvimento de habilidades técnicas específicas, ampliando as perspectivas de futuro dos estudantes.

No entanto, apesar da importância do livro didático no processo de ensino e aprendizagem ser inegável, essa modalidade não dispõe de um material próprio pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Por meio do PNLD, o Ministério da Educação (MEC) adquire e distribui gratuitamente livros didáticos e outros materiais pedagógicos para escolas públicas de todo o país. Esse programa abrange livros didáticos para a EJA no nível fundamental, mas não no nível do Ensino Médio e muito menos para as particularidades do Ensino Médio oferecido integrado com o Ensino Técnico.

A ausência de um livro didático específico e abrangente para a EJA Ensino Médio é uma lacuna grave e prejudicial. Os materiais existentes muitas vezes são adaptações de livros destinados ao ensino regular, que nem sempre consideram as particularidades, os ritmos e as experiências de vida dos estudantes da EJA. Esses alunos, em sua maioria, possuem uma bagagem cultural e profissional diversificada, além de conciliarem os estudos com trabalho e outras responsabilidades. Ao mesmo tempo, os professores,muitas vezes sobrecarregados, não dispõe de tempo para preparar material didático adequado para usar em sala de aula, o que acaba prejudicando as atividades docentes.

Diante dessa necessidade, os docentes do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, campus Valparaíso, propuseram um projeto de extensão com o objetivo de suprir tal lacuna, construindo apostilas didáticas para serem disponibilizadas gratuitamente para uso pelas escolas e docentes que oferecem e trabalham com a EJA em nível do Ensino Médio.

Para tentar suprir adequadamente essa lacuna, nos preocupamos em produzir um material totalmente acessível para que as escolas possam baixar e, se necessário, imprimir livremente as apostilas – integral ou parcialmente – para os estudantes. Ou, mesmo que seja disponibilizado para os próprios estudantes imprimirem, o seu custo é extremamente baixo. A ideia é que a apostila toda seja utilizada durante um ano.

Na primeira versão do projeto, disponibilizamos apostilas de Educação Física, História, Inglês, Matemática e Química.

PREFÁCIO

Este material foi elaborado com o objetivo de auxiliar estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) que estão retomando seus estudos e que, muitas vezes, carregam inseguranças com a matemática básica. Procuramos preencher lacunas da formação anterior revisando os conjuntos numéricos e as operações fundamentais, sempre com atenção especial às justificativas que validam os algoritmos usados nas contas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Isto é, não nos preocupamos apenas em mostrar como se faz, mas também em explicar por que se faz daquela forma.

Além disso, também apresentamos capítulos dedicados à resolução de equações de primeiro e segundo grau. Ao final de cada capítulo, o leitor encontrará uma **lista de exercícios de fixação**, elaborada com a intenção de reforçar os conteúdos e promover a autonomia do estudante.

Este material foi escrito com o auxílio dos estudantes Nathália Rebeka Rodrigues Mesquita e Igor Alves Ribeiro, ambos do curso de Licenciatura em Matemática do IFG – Campus Valparaíso. Agradeço a ambos pelas contribuições valiosas ao longo do trabalho, com um agradecimento especial à Nathália, cuja dedicação se destacou especialmente na cuidadosa formatação das equações, contribuindo para a clareza, a organização e a acessibilidade visual do texto.

Valparaíso de Goiás, junho de 2025.
Bruno de Paula Miranda

SUMÁRIO

Capítulo 1- Números naturais

1.1 Introdução aos Números Naturais

Os números naturais surgiram da necessidade de contar e ordenar objetos no dia a dia. Eles são usados não só para saber "quantos" há de algo, mas também para indicar posições: o primeiro da fila, o segundo colocado em uma corrida, o terceiro andar de um prédio. No conjunto dos números naturais, representado por

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

cada número tem um sucessor (o número que vem logo depois) e, exceto o zero, um antecessor (o que vem antes). Além disso, podemos comparar dois números diferentes e dizer qual é maior ou menor. Assim, os números naturais nos ajudam a contar, ordenar e comparar, sendo a base para o aprendizado das operações matemáticas.

1.2 Adição (ou soma)

A adição é uma das operações matemáticas mais presentes no nosso cotidiano. Sempre que juntamos duas ou mais quantidades, estamos somando. Por exemplo, ao contar o total de frutas em uma sacola com 3 maçãs e 2 bananas, realizamos a adição $3 + 2 = 5$. A operação de adição surgiu da necessidade de reunir quantidades: somar animais em um rebanho, produtos em uma compra ou pontos em um jogo.

A adição entre dois números naturais é representada pelo símbolo de "mais" (+). Dados dois números naturais a e b (muitas vezes, quando queremos falar de propriedades que valem para qualquer número, e não apenas um número específico, utilizamos letras minúsculas), o resultado da adição $a + b$ é também um número natural, chamado de soma. Dizemos que o conjunto dos números naturais é fechado para a adição, pois sempre que somamos dois naturais, o resultado também é um natural.

Exemplo 1.1 *Se João tem 4 balas e ganha mais 3 balas, ao todo ele terá:* $4 + 3 = 7$

Exemplo 1.2 *Na sala há 6 meninos e 5 meninas. O total de alunos é:* $6 + 5 = 11$

A adição também respeita algumas propriedades importantes que estudaremos mais adiante, como a comutatividade e a associatividade. Por enquanto, é importante per ceber que somar é reunir, juntar quantidades em uma só.

1.3 Produto (ou multiplicação)

A multiplicação é uma forma de adição repetida. Sempre que temos várias quantidades iguais e queremos saber o total, usamos a multiplicação. Por exemplo, se cada caixa tem 4 maçãs e temos 3 caixas, podemos somar $4 + 4 + 4 = 12$, ou simplesmente multiplicar $3 \times 4 = 12$ (três vezes o quatro). Essa operação surgiu da necessidade de simplificar cálculos com repetições e está presente em situações do dia a dia, como calcular preços, medir áreas e organizar objetos em grupos.

A multiplicação entre dois números naturais é representada pelo símbolo de "vezes" (×). Dados dois números naturais a e b, o produto $a \times b$ é o total obtido ao somar a consigo mesmo b vezes. Assim como a adição, a multiplicação de dois naturais também resulta em um número natural.

Exemplo 1.3 *Cada pacote tem 5 balas. Se temos 4 pacotes, o total de balas é*: $4 \times 5 = 20$

Exemplo 1.4 *Em uma sala há 6 fileiras com 3 carteiras cada. O total de carteiras é:* $6 \times 3 = 18$

A multiplicação, assim como a adição, obedece a propriedades importantes, como a comutatividade (a ordem dos fatores não altera o produto) e a associatividade. Estu daremos essas propriedades com mais detalhes adiante.

1.4 Propriedades da Soma e do Produto

As operações de adição e multiplicação entre números naturais obedecem a algumas propriedades importantes. Conhecer essas propriedades ajuda a compreender melhor os cálculos e a resolver problemas com mais facilidade.

Comutatividade

A ordem dos números não altera o resultado da operação.

Adição: $a + b = b + a$

Multiplicação: $a \times b = b \times a$

Exemplo 1.5

$3 + 5 = 8$ *e* $5 + 3 = 8$

$4 \times 6 = 24$ *e* $6 \times 4 = 24$.

Associatividade

O modo como agrupamos os números não altera o resultado da operação.

Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Multiplicação: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Exemplo 1.6

$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

$(2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$

$2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$

Observação. Perceba que os parênteses "( )"são utilizados na matemática para indicar o que vamos operar primeiro, como no caso:

$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

Perceba que primeiro operamos a soma de $(2 + 3)$ e depois operamos o resultado disso com o 5.

Elemento neutro

É o número que, ao ser usado na operação, não altera o valor do outro número.

Adição: o elemento neutro é o zero: $a + 0 = a$

Multiplicação: o elemento neutro é o um: $a \times 1 = a$

Exemplo 1.7

$7 + 0 = 7$ *e* $9 \times 1 = 9$

Distributividade da multiplicação em relação à adição

Multiplicar um número pela soma de dois outros é o mesmo que multiplicá-lo por cada um separadamente e somar os resultados:

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemplo 1.8

$2 \times (3 + 4) = 2 \times 7 = 14$

$2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$

Observação. Quando lidamos com diferentes operações como a adição (+) e a multi plicação (×) em uma mesma conta, temos uma ordem a ser seguida:

1. Operamos a multiplicação.
2. Operamos a adição.

Isso ocorre, por exemplo no caso listado acima:

$2 \times 3 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$

Primeiro efetuamos as multiplicações de 2×3 *e* 2×4, apenas depois de termos os produtos em mãos é que operamos a adição de $6 + 8$.

1.5 Escrita dos números em base 10

Os números naturais que usamos no dia a dia são escritos em **base 10**, também chamada de sistema decimal. Isso significa que usamos dez símbolos (chamados de alga rismos) para representar qualquer número: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Mas por que usamos justamente a base 10? Uma das explicações mais aceitas é que os seres humanos, desde os tempos antigos, aprenderam a contar usando os próprios dedos. Como temos 10 dedos nas mãos, tornou-se natural organizar os números em grupos de 10. Assim, a base 10 se tornou a forma mais comum de escrever e representar quantidades.

Nesse sistema, cada número é formado por algarismos colocados em posições específicas. Cada posição representa uma **potência de 10**, ou seja, uma multiplicação de vários números 10 entre si. Veja:

$10^0 = 1$: qualquer número (exceto o 0) elevado a 0 é 1.

$10^1 = 10$: o 10 aparece uma vez.

$10^2 = 10 \times 10 = 100$: o 10 aparece duas vezes.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$: o 10 aparece três vezes.

Essas potências de 10 mostram o valor de cada posição no número.

Exemplo 1.9 *No número* 345, *temos*:

$345 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Isto é, são três centenas, quatro dezenas e cinco unidades.

Exemplo 1.10 *No número* 208:

$208 = 2 \times 100 + 0 \times 10 + 8 \times 1 = 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Isto é, são duas centenas e oito unidades.

Exemplo 1.11 *No número* 70:

$70 = 7 \times 10 + 0 \times 1 = 7 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

Isto é, sete dezenas.

Entender a base 10 e as potências de 10 nos ajuda a compreender melhor como os números são organizados e será muito útil para aprender os algoritmos de adição e multiplicação que estudaremos a seguir.

1.6 Algoritmo da Adição

Para somar números maiores com mais facilidade, usamos um procedimento chamado **algoritmo da adição.** Esse algoritmo segue uma ordem simples, baseada na escrita dos números em colunas, respeitando as unidades, dezenas, centenas e assim por diante.

O algoritmo funciona da direita para a esquerda: começamos somando as unidades, depois as dezenas, depois as centenas, e assim por diante. Se a soma de uma coluna passar de 9, "subimos" o valor extra para a próxima coluna, formando o que chamamos de **vai-um**.

Exemplo 1.12 *Vamos somar* 278 + 456:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 8 \\ + & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Unidades: 8 + 6 = 14 → *colocamos o* 4 *e subimos* 1 *para as dezenas.*

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 7 & 8 \\ + & 4 & 5 & 6 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

Dezenas: 7 + 5 = 12, *mais* 1 *que subiu:* 12 + 1 = 13 ➝ *colocamos o* 3 *e subimos* 1 *para as centenas.*

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
278 \\
+\ 456 \\
\hline
34
\end{array}
$$

Centenas: 2 + 4 = 6, mais 1 *que subiu*: 6 + 1 = 7

$$
\begin{array}{r}
278 \\
+\ 456 \\
\hline
734
\end{array}
$$

Portanto, 278 + 456 = 734. *Note que:*

$278 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$

e

$456 = 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6$

Então,

$$
\begin{array}{rcl}
278 & = & 2\times 100 + 7\times 10 + 8 \\
+\ 456 & = & 4\times 100 + 5\times 10 + 6 \\
\hline
 & = & 6\times 100 + 12\times 10 + 14 \\
 & = & 6\times 100 + 12\times 10 + 1\times 10 + 4 \quad \longrightarrow \ \textit{sobe 1} \\
 & = & 6\times 100 + 13\times 10 + 4 \\
 & = & 6\times 100 + (10+3)\times 10 + 4 \\
 & = & 6\times 100 + 1\times 100 + 3\times 10 + 4 \quad \longrightarrow \ \textit{sobe 1} \\
 & = & 7\times 100 + 3\times 10 + 4 \\
734 & = & 734
\end{array}
$$

Esse procedimento pode ser usado para somar qualquer par de números naturais. Ao organizar os números em colunas, sempre alinhando corretamente as unidades, dezenas, centenas, etc., conseguimos fazer a soma com segurança e clareza.

Dica: sempre que possível, revise a soma ao final para conferir se o resultado faz sentido!

1.7 Algoritmo da Multiplicação

A multiplicação entre números naturais pode ser feita de maneira organizada, de modo similar ao que fizemos com a adição, usando um procedimento chamado algoritmo da multiplicação. Esse método consiste em multiplicar cada algarismo de um número por cada algarismo do outro, respeitando suas posições (unidades, dezenas, centenas, etc.) e depois somar os resultados parciais.

Vamos ver um exemplo para entender melhor.

Exemplo 1.13 *Vamos multiplicar* 123×4:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Multiplicamos cada algarismo de 123 *por* 4, *começando pela direita*:

- *Unidades:* $3 \times 4 = 12 \rightarrow$ *colocamos 2 e subimos 1.*

$$\begin{array}{r} 1\ \\ 123 \\ \times \quad 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

- *Dezenas:* $2 \times 4 = 8$, *mais 1:* $8 + 1 = 9$

$$\begin{array}{r} +1\ \\ 123 \\ \times \quad 4 \\ \hline 92 \end{array}$$

- *Centenas:* $1 \times 4 = 4$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad 4 \\ \hline 492 \end{array}$$

Portanto, $123 \times 4 = 492$. *Note que:*

$$123 \times 4 = (100 + 2 \times 10 + 3) \times 4$$

$$\begin{aligned} &= 4\times 100 + 8\times 10 + 12 \\ &= 4\times 100 + 8\times 10 + 1\times 10 + 2 \longrightarrow \text{sobe } 1 \\ &= 4\times 100 + 9\times 10 + 2 \\ &= 492 \end{aligned}$$

Se o número tiver mais de um algarismo, fazemos uma multiplicação para cada posição e somamos os resultados parciais.

Exemplo 1.14 *Vamos multiplicar* 23×15. Primeiro organizamos a conta em colunas:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 15 \\ \hline 115 \\ +230 \\ \hline 345 \end{array}$$

Explicação:
Primeiro multiplicamos 23 × 5 = 115

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 15 \\ \hline 115 \end{array}$$

Depois multiplicamos 23 × 1 = 23, *mas como o 1 está na casa das dezenas* (*vale* 10), *escrevemos* 230

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 15 \\ \hline 115 \\ 230 \end{array}$$

Por fim, somamos os dois resultados parciais: 115 + 230 = 345

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 15 \\ \hline 115 \\ +230 \\ \hline 345 \end{array}$$

Portanto, 23 × 15 = 345. *Ilustramos com mais detalhes na seguinte imagem*:

$$\begin{aligned} 23 \times 15 &= 23 \times (10 + 5) \\ &= 23 \times 10 + 23 \times 5 \\ &= 23 \times 10 + ((2 \times 10) + 3) \times 5 \\ &= 23 \times 10 + 10 \times 10 + 15 \\ &= 23 \times 10 + 10 \times 10 + 10 + 5 \quad \longrightarrow \quad \text{sobe 1} \\ &= 23 \times 10 + 11 \times 10 + 5 \\ &= 230 + 115 \end{aligned}$$

Dica: preste atenção ao alinhamento dos números e ao uso do “vai-um” nas multiplicações parciais. Com prática, o algoritmo se torna rápido e confiável.

1.8 Exercícios

Exercício 1. Um caminhoneiro fez 3 viagens em um dia: na primeira ele levou 250 kg, na segunda 310 kg e na terceira 190 kg. Quantos quilos ele transportou no total?

Exercício 2. Uma fábrica produz 45 peças por hora. Quantas peças são produzidas em 6 horas?

Exercício 3. Luana recebe R$180 por dia de trabalho. Quanto ela ganha se trabalhar por 5 dias?

Exercício 4. Calcule: 378 + 629 usando o algoritmo da adição.

Exercício 5. Calcule: 214×3 utilizando o algoritmo da multiplicação.

Exercício 6. Qual é o valor de: $(4 + 3) + 5$ e de $4 + (3 + 5)$? O que isso mostra sobre a adição?

Exercício 7. Complete com (V) ou (F):
a) $5 \times 6 = 6 \times 5$ ( )
b) $8 + 0 = 0 + 8$ ( )
c) $2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$ ( )

Exercício 8. Um mercado vende pacotes com 6 garrafas. Um caminhão trouxe 12 pacotes pela manhã e mais 15 à tarde. Quantas garrafas chegaram no total?

Exercício 9. Organize e resolva a conta: 347 + 128 + 525.

Exercício 10. Uma turma do EJA fez um mutirão para arrecadar alimentos. Cada grupo arrecadou a mesma quantidade:
- Grupo A → 3 sacolas,
- Grupo B → 4 sacolas,
- Grupo C → 5 sacolas.

Cada sacola tem 12 itens. Quantos itens foram arrecadados no total?

Exercício 11. Um pedreiro recebeu 35 sacos de cimento em cada carreto e realizou 8 carretos ao longo do dia. Quantos sacos de cimento foram transportados no total?

Exercício 12. Uma loja vende camisetas por R$47 cada. Qual será o valor pago por 12 camisetas?

Exercício 13. Calcule: 426×24 utilizando o algoritmo da multiplicação.

Exercício 14. Calcule: $(3\times4)\times5$ e $3\times(4\times5)$. O que isso mostra sobre a multiplicação?

Exercício 15. Complete com (V) ou (F):
a) $6 \times 7 = 7 \times 6$ ( )
b) $9 \times 0 = 9$ ( )
c) $5 \times (2 + 3) = 5 \times 2 + 5 \times 3$ ( )

Capítulo 2- Números inteiros

Os números inteiros surgiram da necessidade de representar situações em que há perdas, dívidas ou temperaturas abaixo de zero. Por muito tempo, só se usavam os números naturais para contar e somar quantidades. No entanto, com o tempo, as pessoas passaram a lidar com contextos onde era preciso ir além do zero.

Por exemplo, se uma pessoa tem 5 reais e gasta 7, ela não fica com zero, mas sim com uma dívida de 2 reais. Para representar isso, usamos o número −2. Assim, surgem os **números negativos**, que indicam valores abaixo de zero.

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z (do alemão Zahlen, que significa "números"), e inclui os números naturais e seus respectivos valores negativos:

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Esses números são muito usados no dia a dia, como ao indicar temperaturas negativas, andar abaixo do térreo em um prédio, ou registrar um saldo negativo em uma conta bancária. Ao longo deste capítulo, vamos entender melhor como representar, comparar e operar com os números inteiros.

2.1 O inverso aditivo

No conjunto dos números inteiros, cada número tem um **sinal**, que indica se ele repre senta uma quantidade positiva ou negativa. Os números maiores que zero são chamados de **positivos** e geralmente aparecem com o sinal "+", embora esse sinal nem sempre seja escrito. Já os números menores que zero são chamados de **negativos** e **sempre** aparecem com o sinal "−".

+3 (ou simplesmente 3) representa uma quantidade positiva.

−5 representa uma quantidade negativa.

Cada número inteiro possui um **inverso aditivo**, ou seja, um número com o **mesmo valor numérico**, mas com o **sinal contrário**. Quando somamos um número com seu inverso aditivo, o resultado é sempre zero.

O inverso aditivo de 5 é −5, pois $5 + (-5) = 0$.

O inverso aditivo de −3 é 3, pois $-3 + 3 = 0$.

O número 0 é o único número que é seu próprio inverso aditivo: $0 + 0 = 0$.

Dizemos que dois números que são inversos um do outro são **números opostos**. A ideia de inverso aditivo é útil para representar situações como ganhos e perdas, entradas e saídas, ou movimentos em sentidos contrários.

Exemplo 2.1 *Se João tem uma dívida de* 4 *reais* (−4) *e ganha* 4 *reais, ele zera sua dívida*:

$-4 + 4 = 0$

Exemplo 2.2 *Se um elevador está no andar* +2 *e desce* 2 *andares, chega ao térreo*:

$2 + (-2) = 0$

2.2 Propriedades da soma e do produto nos inteiros

As operações de **adição** e **multiplicação** continuam valendo no conjunto dos números inteiros. Assim como nos números naturais, a soma e o produto de inteiros obedecem às mesmas propriedades:

- **Comutatividade:** a ordem dos fatores ou parcelas não altera o resultado.
- **Associatividade:** o modo de agrupar os números não altera o resultado.
- **Elemento neutro:** na adição, é o 0; na multiplicação, é o 1.
- **Distributividade:** a multiplicação distribui sobre a adição.

A principal novidade nos inteiros está no sinal negativo nos produtos. Para isso, adotamos uma convenção importante:

Por convenção, definimos que:

$(-1) \times a = -a$

ou seja, o produto de -1 por um número inteiro a é o **inverso aditivo** de a.

Exemplo 2.3

$(-1) \times 5 = -5$ *e* $(-1) \times (-5) = 5$

Com base nessa convenção, podemos entender por que o produto de dois números negativos dá um resultado positivo:

$(-1) \times (-1) = 1$

Isso acontece porque, ao multiplicarmos -1 por -1, estamos pegando o inverso aditivo do inverso aditivo de -1, o que nos leva de volta ao próprio 1.

Exemplo 2.4

$(-2) \times (-3) = 6$

Pois

$(-2) \times (-3) = (-1) \times 2 \times (-1) \times 3$

$= ((-1) \times (-1)) \times 2 \times 3$

$= 1 \times 2 \times 3$

$= 6$

Exemplo 2.5

$(-4) \times 2 = -8$

Pois

$(-4) \times 2 = (-1) \times 4 \times 2$

$= (-1) \times 8$

$= -8$

Portanto, ao multiplicar inteiros, observe os sinais:

- Positivo × Positivo = Positivo
- Negativo × Positivo = Negativo
- Positivo × Negativo = Negativo
- Negativo × Negativo = Positivo

Essas regras nos ajudam a entender o comportamento do produto entre inteiros e são muito úteis no cotidiano e na matemática em geral.

2.3 Subtração de inteiros

A **subtração** é uma operação matemática que usamos quando queremos tirar uma quantidade de outra. Por exemplo, se uma pessoa tem 7 reais e gasta 3, ela fica com:

$7 - 3 = 4$

Nesse caso, subtrair significa **diminuir**, ou seja, ver quanto sobra depois de tirar uma parte de um todo.

No conjunto dos números inteiros, compreendemos a subtração de uma forma mais geral:

Subtrair um número é o mesmo que somar o seu inverso aditivo.

Ou seja, quando fazemos $a - b$, isso é o mesmo que fazer:

$a - b = a + (-b)$

Essa forma de escrever nos ajuda a entender que a subtração pode ser vista como uma **soma especial**, onde estamos somando o oposto (ou o "negativo") do segundo número.

Observação. Anteriormente falamos sobre a ordem em que efetuamos as operações em uma mesma conta. Como a subtração se trata de uma soma especial, ela tem a mesma ordem que a adição, assim, a ordem passa a ser:

1. Operamos a multiplicação.

2. Operamos a adição ou a subtração (na ordem que aparecer da direita para a esquerda).

Exemplo 2.6
$7 - 3 = 7 + (-3) = 4$

Exemplo 2.7
$5 - 8 = 5 + (-8) = -3$

Exemplo 2.8
$-2 - 6 = -2 + (-6) = -8$

Exemplo 2.9
$-4 - (-5) = -4 + 5 = 1$

Perceba que, quando subtraímos um número negativo, acabamos somando. Isso acon tece porque o oposto de -5 é $+5$, e então:
$-4 - (-5) = -4 + 5$
Essa forma de pensar é muito poderosa, pois nos mostra que podemos resolver qualquer subtração usando apenas a adição — com o cuidado de trocar o sinal do número que está sendo subtraído.

Algoritmo da subtração com reagrupamento
Vamos agora aprender como fazer subtrações com números inteiros utilizando o algo ritmo da subtração tradicional, aquele em que, quando não conseguimos subtrair um algarismo de outro, "pegamos emprestado" da próxima casa decimal.
Esse método é muito usado quando precisamos resolver contas como $52 - 27$, por exemplo. Vamos ver como ele funciona passo a passo.

Exemplo 2.10 *Calculemos* 52 - 27.
Vamos organizar os números em colunas, colocando as unidades abaixo das unidades e as dezenas abaixo das dezenas:

$$\begin{array}{r} 52 \\ -27 \\ \hline \end{array}$$

Começamos subtraindo da direita para a esquerda:
Na casa das unidades: temos $2 - 7$. Como 2 é menor que 7, não conseguimos fazer essa subtração diretamente. - Então, "pegamos emprestado 1 dezena do 5" (na casa das dezenas), que vira 4, e somamos 10 unidades ao 2, ficando com 12 unidades. Agora podemos fazer $12 - 7 = 5$. Na casa das dezenas, como pegamos 1, o 5 virou 4. Agora fazemos $4 - 2 = 2$.
O resultado da subtração é:

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 27 \\ 25 \\ \hline \end{array}$$

A imagem abaixo ilustra com mais detalhes o que foi feito acima.

$$\begin{array}{r} 4\cancel{5}\,{}^{1}2 \\ -27 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 52 - 27 &= (5 \times 10 + 2) - (2 \times 10 + 7) \\ &= 5 \times 10 - 2 \times 10 + 2 - 7 \quad \longrightarrow \text{2 é menor que 7, então "pegamos uma das 5 dezenas do 50".} \\ &= \overbrace{4 \times 10 + 10}^{} - 2 \times 10 + 2 - 7 \\ &= 4 \times 10 - 2 \times 10 + 12 - 7 \\ &= 2 \times 10 + 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Exemplo 2.11 *Calculemos agora* 403 − 186.
Agora um exemplo com três algarismos:

$$\begin{array}{r} 403 \\ -186 \\ \hline \end{array}$$

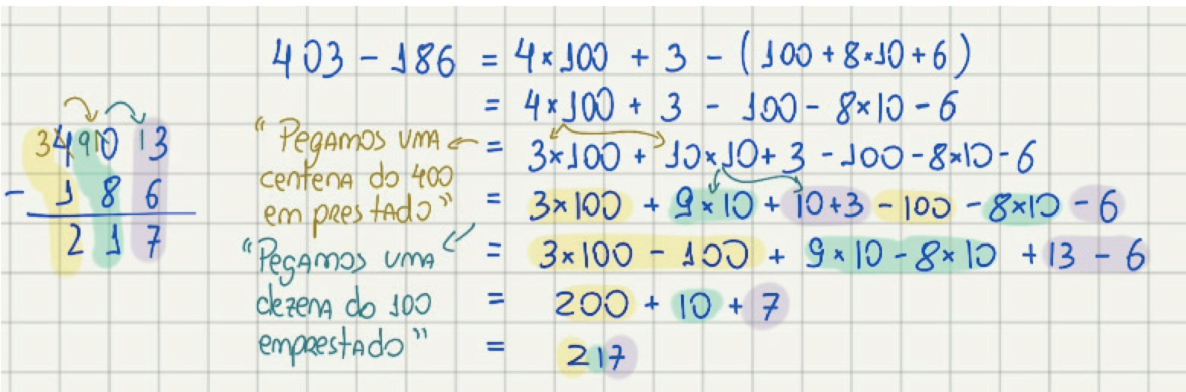
Começamos pelas unidades:

3−6 não dá. Pegamos 1 dezena do zero... mas o zero também não tem! - Quando isso acontece, vamos mais à esquerda. Pegamos 1 centena do 4, que vira 3. A centena que pegamos vira 10 dezenas. Agora o zero dezenas vira 9 (porque usamos 1 dezena para emprestar para as unidades) e o 3 das unidades vira 13.

Agora podemos subtrair normalmente:
Unidades: 13 − 6 = 7
Dezenas: 9 − 8 = 1
Centenas: 3 − 1 = 2
Portanto:

$$\begin{array}{r} 403 \\ -186 \\ 217 \\ \hline \end{array}$$

A imagem abaixo ilustra com mais detalhes o que foi feito acima:



Dica importante

Nem sempre é necessário "pegar emprestado", mas quando o algarismo de cima (o que está sendo diminuído) for menor do que o de baixo (o que está sendo subtraído), é aí que precisamos do reagrupamento.

2.4 Divisão exata

A **divisão exata** entre números inteiros ocorre quando um número pode ser dividido por outro em "parcelas iguais". Dizemos que um número inteiro a é **divisível** por um número inteiro b se existe um número inteiro q tal que:

$a = b \times q$

Quando isso acontece, dizemos que b **divide** a e que a é **múltiplo** de b, e escrevemos:

$b \mid a$

Também dizemos que a divisão de a por b é **exata**.

Exemplo 2.12 *Como* 6 = 3 × 2, *temos que* 3 *divide* 6, *isto é*, 3 | 6.

Exemplo 2.13 *Temos que* 4 | −12 *pois* −12 = −3 × 4. *Então*, -12 *é divisível por* 4.

Exemplo 2.14 *O número* 36 *é múltiplo de* 12, *pois* 36 = 12 × 3.

Exemplo 2.15 *Note que a divisão de* 7 *por* 3 *não é uma divisão exata, pois não existe número inteiro que multiplicado por* 3 *dê exatamente* 7. *Portanto*, 3 *não divide* 7.

Divisores positivos de um número

Dado um número inteiro n, dizemos que d é um **divisor positivo de** n se d for maior que zero e $d \mid n$. O conjunto de todos os divisores positivos de n é representado por:

$D(n)$

Exemplo 2.16 D(6) = {1, 2, 3, 6}, *pois esses são todos os números positivos que dividem* 6.

Exemplo 2.17 D(10) = {1, 2, 5, 10}.

Exemplo 2.18 D(5) = {1, 5}.

Números primos

Um número natural p maior que 1 é chamado de **número primo** se seus únicos divi sores positivos forem o 1 e ele mesmo. Isso significa que:

$D(p) = \{1, p\}$

Exemplo 2.19 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 são exemplos de números primos.

Note que o número 1 **não é primo**, pois ele tem apenas um divisor positivo (o próprio 1).

Fatoração em primos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como **produto de números primos**. Essa forma de escrever um número é chamada de f**atoração em primos**. E essa fatoração é única, exceto pela ordem dos fatores.

Essa importante ideia é conhecida como o **Teorema Fundamental da Aritmética**.

Exemplo 2.20

(a) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

(b) $30 = 2 \times 3 \times 5$

(c) $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

Observação. Acima, da mesma maneira que fizemos na seção de escrita em base 10, no capítulo 1, ao multiplicarmos um mesmo número a por ele mesmo n vezes, escrevemos a^n e dizemos tratar-se da **potência de base** a e **expoente** n.

Os números primos são infinitos

Os matemáticos já provaram que o conjunto dos números primos é **infinito**, ou seja, nunca acaba. Sempre podemos encontrar um número primo maior do que qualquer número dado.

Os números primos funcionam como os **átomos da matemática**: todos os números inteiros positivos podem ser “quebrados” em produtos de primos. Assim como os átomos formam todas as substâncias da natureza, os números primos formam todos os números inteiros por meio da multiplicação.

2.5 Máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC)

Quando comparamos dois ou mais números, muitas vezes queremos saber quais são os divisores ou múltiplos que eles têm em comum. Isso nos leva a dois conceitos muito importantes: o **máximo divisor comum** (MDC) e o **mínimo múltiplo comum** (MMC).

Máximo divisor comum (MDC)

O **máximo divisor comum** entre dois números naturais a e b, indicado por MDC(a, b), é o maior número natural que divide *a* e *b* ao mesmo tempo. Isto é, é o maior número que está ao mesmo tempo em D(*a*) e em D(*b*).

Exemplo 2.21 *Vamos calcular* MDC(12, 18):
D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}, D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
Os divisores comuns são: {1, 2, 3, 6}
O maior deles é 6, então:
MDC(12, 18) = 6

Exemplo 2.22 *Dona Ana quer montar kits de limpeza com sabão e detergente para doação. Ela tem 24 unidades de sabão e 36 unidades de detergente. Ela quer montar os kits de forma que todos fiquem iguais e não sobre nenhum item.*

Qual é o maior número de kits iguais que ela pode montar?

Precisamos descobrir o **maior número que divide 24 e 36 ao mesmo tempo**, ou seja, o **MDC(24, 36)**.

D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}, D(36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}
Os divisores comuns são: {1, 2, 3, 4, 6, 12}
O maior deles é 12, então:
MDC(24, 36) = 12
Isso significa que Dona Ana pode montar 12 kits iguais, colocando:

$$\frac{24}{12} = 2 \ saboes \ por \ kit \ e \ \frac{24}{12} = 3 \ detergentes \ por \ kit$$

Mínimo múltiplo comum (MMC)

O **mínimo múltiplo comum** entre dois números naturais *a* e *b*, indicado por MMC(*a*, *b*), é o menor número natural, diferente de zero, que é múltiplo de *a* e de *b* ao mesmo tempo. Dito de maneira diferente mas equivalente, o MMC(*a*, *b*) é o menor número natural que é divísel por *a* e *b* ao mesmo tempo.

Exemplo 2.23 *Vamos calcular* MMC(4, 6):
Múltiplos de 4 = {4, 8, 12, 16, 20, 24, . . .}
Múltiplos de 6 = {6, 12, 18, 24, 30, . . .}
Os múltiplos comuns são: {12, 24, . . .}
O menor deles é 12, então:
MMC(4, 6) = 12

Exemplo 2.24 *Carlos vai à feira a cada 6 dias. Ana vai à mesma feira a cada 8 dias. Hoje, os dois foram juntos. Em quantos dias eles voltarão a se encontrar na feira no mesmo dia?*

Para resolver isso, precisamos descobrir o **menor número de dias** que seja múltiplo de 6 e de 8 ao mesmo tempo, ou seja, o MMC(6, 8).

Múltiplos de 6 ={6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, . . .}

Múltiplos de 8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48, . . .}

O menor múltiplo comum entre os dois é 24, então:

MMC(6, 8) = 24

Isso significa que Carlos e Ana voltarão a se encontrar na feira daqui a **24 dias**.

Esses dois conceitos são muito úteis em diversas situações do cotidiano, como em problemas de divisão em partes iguais, organização de horários e cálculos com frações, como veremos mais adiante.

Divisão com resto

Quando dividimos um número inteiro a (o **dividendo**) por outro número inteiro **b** (o **divisor**), com b diferente de zero, nem sempre a divisão é exata. Nesses casos, encontramos dois números inteiros:

- o **quociente** q, que é o número de vezes que o divisor "cabe" dentro do número a;
- o **resto** r, que é o que sobra após fazer essa divisão.

Essa divisão pode ser escrita na forma:

$a = b \times q + r$

O resto r é sempre um número maior ou igual a zero, e sempre **menor que o divisor** b. Por exemplo, se estamos dividindo por 5, o resto pode ser 0, 1, 2, 3 ou 4 — mas nunca 5 ou mais.

Como entender isso: imagine todos os múltiplos de um número b (como 0, b, 2b, 3b, 4b, . . .). O número a sempre estará em algum lugar entre dois desses múltiplos consecutivos ou será ele mesmo um múltiplo. A diferença entre a e o múltiplo de b mais próximo, sem ultrapassá-lo, é justamente o resto da divisão.

Exemplo 2.25 *Vamos dividir* 23 *por* 5.

Múltiplos de 5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, . . .

O múltiplo de 5 mais próximo de 23, sem passar de 23, é 20 = 5 × 4.

Então: $q = 4$ e $r = 23 - 20 = 3$

$\Rightarrow 23 = 5 \times 4 + 3$

e temos quociente $q = 4$ e resto $r = 3$.

Exemplo 2.26 *Vamos dividir* 40 *por* 6.

Múltiplos de 6: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, . . .

O múltiplo de 6 mais próximo de 40, sem ultrapassá-lo, é 36 = 6 × 6. Então:

$q = 6$ e $r = 40 - 36 = 4$

$\Rightarrow 40 = 6 \times 6 + 4$ e temos quociente 6 e resto 4.

Exemplo 2.27 *Vamos dividir* 36 *por* 6.

Como 36 é múltiplo exato de 6, temos:

$q = 6$ e $r = 0$

$\Rightarrow 36 = 6 \times 6 + 0$

Esse processo é chamado de **divisão com resto**, ou **algoritmo da divisão**, e nos garante que, para qualquer número a e qualquer divisor b diferente de zero, existe uma única forma de escrever:

$a = b \times q + \mathbf{r}$, onde o resto r é um número que não ultrapassa o divisor e nunca é negativo.

O algoritmo da divisão na chave

O algoritmo de divisão na chave é um procedimento usado para dividir dois números naturais, encontrando o **quociente** (quantas vezes o divisor "cabe" no número que está sendo dividido) e o **resto** (o que sobra depois da divisão).

Esse algoritmo é bastante utilizado no dia a dia, especialmente quando se precisa fazer contas manualmente. A ideia central é ir dividindo os algarismos do número de cima (o dividendo) um a um, da esquerda para a direita, formando blocos que podem ser divididos pelo número de baixo (o divisor).

Vamos pensar assim: começamos olhando os primeiros algarismos do dividendo e vemos se o número formado por eles pode ser dividido pelo divisor. Se não for suficiente, pegamos mais um algarismo. Assim que conseguimos formar um número maior ou igual ao divisor, fazemos a divisão e escrevemos o quociente abaixo da "chave". Depois, multiplicamos, subtraímos e "descemos" o próximo algarismo do dividendo. Repetimos esse processo até que todos os algarismos do dividendo tenham sido usados.

A cada passo, descobrimos mais um dígito do quociente, sempre da esquerda para a direita. O processo termina quando já usamos todos os algarismos do número que está sendo dividido. Se ao final sobrar algum valor menor que o divisor, esse será o resto da divisão.

A seguir, vamos ver um exemplo passo a passo para entender bem como aplicar esse método.

Estruturamos a divisão na chave da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} \textit{dividendo} & \textit{divisor} \\ \cline{2-2} \downarrow & \textit{quociente} \\ \textit{resto} & \end{array}$$

Observação. O símbolo " $\lfloor$ "é chamado de chave

Exemplo 2.28 *Vamos dividir* 93 *por* 7:

$$\begin{array}{r|l} 93 & 7 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Começamos da esquerda para a direita. Primeiro escolhemos 1 para representar as dezenas do quociente (se fosse mais que uma dezena, o produto já passaria de 93). Então vamos a 70. Para 93 faltam 23.

$$\begin{array}{r|l} 93 & 7 \\ \cline{2-2} -70 & 1 \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

Agora selecionamos o dígito das unidades do quociente. Deve ser 3, pois o múltiplo de 7 mais próximo de 23 (e menor que 23) é 3 × 7 = 21. Fica faltando 2.

$$\begin{array}{r|l} 93 & 7 \\ \cline{2-2} -70 & 13 \\ \cline{1-1} 23 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Como 2 é menor que 7, esse é o resto.

Exemplo 2.29 *Vamos dividir* 374 *por* 9:

$$\begin{array}{r|l} 374 & 9 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Novamente começamos da esquerda para a direita. Como 3 é menor que 9, olhamos para 37. Então incluímos o primeiro dígito do quociente (4). Como 4 × 9 = 36, subtraímos 360 (o 4 é o dígito das dezenas).

$$\begin{array}{r|l} 374 & 9 \\ \cline{2-2} -360 & 4 \\ \cline{1-1} 14 & \end{array}$$

Como 374 − 360 = 14, o próximo dígito do quociente deve ser 1 (o 1 é o dígito das unidades).

$$\begin{array}{r|l} 374 & 9 \\ \cline{2-2} -360 & 41 \\ \cline{1-1} 14 & \\ -9 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Portanto, o resto deve ser 14 − 9 = 5, pois 5 é menor que 9.

Exemplo 2.30 *Vamos dividir* 541 *por* 11:

$$\begin{array}{r|l} 541 & 11 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Como 5 é menor que 11, olhamos para 54. O múltiplo de 11 mais próximo de 54 e menor que 54 é 44. Então, o primeiro dígito do quociente deve ser 4. Subtraímos 440 e ficamos com 101.

$$\begin{array}{r|l} 541 & 11 \\ \cline{2-2} -440 & 4 \\ \cline{1-1} 101 & \end{array}$$

O múltiplo de 11 mais próximo de 101 e menor que 101 é 99. Então o segundo dígito do quociente deve ser 9.

$$\begin{array}{r|l} 541 & 11 \\ \cline{2-2} -440 & 49 \\ \cline{1-1} 101 & \\ -99 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Esse método da conta armada é muito usado no dia a dia para resolver divisões com mais segurança. Ele também mostra claramente a relação entre dividendo, divisor, quociente e resto, e ajuda a entender a fórmula:

$$a = b \times q + r$$

2.6 Exercícios

Exercício 1. Um eletricista recebeu R$250,00 por um serviço e gastou R$320,00 comprando materiais. Qual foi o saldo final dessa atividade?

Exercício 2. A temperatura em uma cidade era de 3ºC. Durante a madrugada, caiu 7 graus. Qual é a nova temperatura?

Exercício 3. Um pescador tinha uma dívida de R$45 na loja de pesca. Ele pagou R$45. Qual é o saldo atual?

Exercício 4. O número −6 é o inverso aditivo de qual número? Explique.

Exercício 5. Um depósito agrícola armazenava 48 sacos de arroz. Se cada pilha tem 6 sacos, quantas pilhas são formadas?

Exercício 6. Complete com (V) ou (F):
a) O oposto de +8 é −8. ( )
b) Subtrair um número negativo é o mesmo que somar o inverso aditivo do número. ( )
c) Todo número negativo é menor que zero. ( )

Exercício 7. Um agricultor colheu 90 caixas de frutas. No dia seguinte, perdeu 110 por causa da chuva. Quantas caixas ele tem agora?

Exercício 8. Calcule:
a) $(+12) + (-7)$
b) $(-5) - (-3)$
c) $(-9) + (+4)$

Exercício 9. Um aluno anotou a temperatura de sua cidade durante três dias:
- Dia 1: −2ºC
- Dia 2: 3ºC
- Dia 3: −1ºC

Qual foi a temperatura mais alta? E a mais baixa?

Exercício 10. Liste todos os divisores do número 36.

Exercício 11. Escreva os 5 primeiros múltiplos de 7.

Exercício 12. Qual é o menor número que é múltiplo de 3 e de 5 ao mesmo tempo?

Exercício 13. O número 42 é múltiplo de quais dos seguintes números: 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Exercício 14. Escreva o número 60 como produto de fatores primos.

Exercício 15. Faça a fatoração completa de 84.

Exercício 16. Qual é o maior fator primo do número 105?

Exercício 17. Escreva os seguintes números como produto de primos:
a) 36
b) 90
c) 120

Exercício 18. Encontre o **MDC** entre 48 e 60.

Exercício 19. Encontre o **MMC** entre 12 e 18.

Exercício 20. Dois irmãos começam a correr em uma pista circular. Um dá uma volta a cada 12 minutos e o outro a cada 18 minutos. Após quanto tempo eles se encontrarão no ponto de partida?

Exercício 21. Uma professora quer dividir 36 lápis e 48 canetas em kits iguais, sem sobrar nada. Qual o maior número de kits que ela pode montar? Quantos lápis e canetas vão em cada kit?

Exercício 22. Divida 97 por 5 e escreva o quociente, o resto e a decomposição da divisão.

Exercício 23. Um grupo de 23 pessoas quer se sentar em filas com 6 cadeiras. Quantas filas completas são formadas? Quantas pessoas sobram?

Exercício 24. Escreva a divisão $n \div d$ que tem quociente 7 e resto 2, com divisor d = 8. Qual é o valor de n?

Exercício 25. Pedro dividiu 134 balas igualmente entre 12 crianças. Quantas balas cada uma recebeu? Quantas sobraram?

Capítulo 3- Números racionais

Ao estudarmos os números naturais e os números inteiros, conseguimos resolver muitos tipos de problemas envolvendo contagem, ganhos e perdas, aumentos e reduções. No entanto, algumas situações do dia a dia exigem um novo tipo de número. Como representar a metade de um bolo? Ou dividir uma quantia de dinheiro entre três pessoas? Situações como essas mostram que precisamos lidar com **partes de um inteiro** — e isso nos leva aos **números racionais**.

3.1 O que são os números racionais?

Os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos na forma de uma fração, ou seja, como uma divisão entre dois números inteiros, desde que o número de baixo (o **denominador**) não seja zero. Por exemplo:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{-3}{4}\ ,\ 5 = \frac{5}{1}\ ,\ 0 = \frac{0}{7}$$

Todos esses são exemplos de números racionais.

O símbolo de fração representa justamente a ideia de dividir. Na fração $\frac{a}{b}$ a ideia é dividir o número inteiro a em b partes iguais. É por isso que usamos as frações para representar "partes quebradas". Por exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ representa uma unidade que foi dividida em quatro partes iguais. Para visualizar isso, pense em um real sendo dividido em quatro partes iguais: cada parte vale 25 centavos, o que equivale a um quarto de real.

Com os números racionais, conseguimos representar partes de um todo, valores inter mediários e resultados de divisões que não são exatas no conjunto dos inteiros. Por isso, eles aparecem com frequência em situações como:

- medidas (como metros, litros, quilos),
- valores monetários (como R$ 2, 50),
- receitas culinárias,
- porcentagens e descontos.

Esses números são essenciais para descrever com precisão muitas situações da vida real.

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$. Essa letra vem da palavra inglesa *quotient*, que significa *quociente*, pois os números racionais surgem como o resultado da divisão (ou quociente) entre dois inteiros. Assim, escrevemos:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ a,\ b\ \varepsilon\ \mathbb{Z},\ b\ \neq\ 0\right\}$$

onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Numa fração $\frac{a}{b}$, chamamos a de **numerador** (o número de cima) e b de **denominador** (o número de baixo).

Observação. Como o objetivo da fração é transmitir a ideia de divisão do numerador pelo denominador, podemos também visualizar os números inteiros como frações. Por exemplo, o número 3 pode ser escrito como $\frac{3}{1}$, pois dividir 3 em uma única parte continua sendo 3. Ou seja, todo número inteiro a pode ser escrito como a fração $\frac{a}{1}$, e assim passa a fazer parte do conjunto dos racionais. No entanto, para simplificar a escrita, é comum omitirmos o denominador 1 e continuarmos representando apenas por a.

3.2 Soma e multiplicação de números racionais

Observação sobre o símbolo de multiplicação: até agora, usamos o símbolo × para representar a multiplicação, como em 3×2 = 6. No entanto, a partir deste ponto, vamos passar a usar o símbolo · (um ponto no meio da linha), que também representa multiplicação. Esse símbolo é muito comum em textos matemáticos e ajuda a evitar confusões com a letra *x*.

Por exemplo:

$3 \cdot 2 = 6$

Vamos começar lembrando que a fração $\frac{1}{n}$ representa uma unidade que foi dividida em *n* partes iguais. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ representa um pedaço de algo que foi dividido em quatro partes do mesmo tamanho.

Se *m* é um número inteiro positivo, faz sentido pensar que multiplicar *m* por $\frac{1}{n}$ é o mesmo que dividir *m* em *n* partes iguais. Ou seja:

$$m.\ \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Isso nos ajuda a entender melhor o significado de frações. Por exemplo:

$$3.\ \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Isso quer dizer que se pegarmos 3 pedaços, cada um valendo um quarto, teremos juntos três quartos de uma unidade.

Agora imagine que temos duas frações com o mesmo denominador, como:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$$

Podemos entender isso como:

$$2.\ \frac{1}{7} + 3.\frac{1}{7} = (2+3).\ \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Portanto, quando somamos frações com denominadores iguais, mantemos o denomina dor e somamos os numeradores:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Mais alguns exemplos:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6},\quad \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$$

3.2.1 Multiplicação de frações

Para entender a multiplicação de dois números racionais, vamos começar com uma ideia concreta: imagine que você tem metade de um chocolate, e resolve dividir essa metade em três partes iguais. Quanto você terá em cada parte?

Metade dividida em três partes iguais significa:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Ou seja, estamos pegando um pedaço de um pedaço que é uma metade. No final, ficamos como um pedaço que é um sexto do tamanho original. Isso é igual a:

$$\frac{1\ .\ 1}{2\ .\ 3} = \frac{1}{6}$$

Portanto, multiplicar duas frações significa multiplicar os numeradores e multiplicar os denominadores. Mais alguns exemplos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2\ .\ 4}{3\ .\ 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3\ .\ 2}{4\ .\ 7} = \frac{6}{28}$$

Essa regra funciona também quando multiplicamos um número inteiro por uma fração. Lembre-se que todo número inteiro *m* pode ser escrito como $\frac{m}{1}$. Então, por exemplo:

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Multiplicar frações é como dizer: "vou pegar uma parte de outra parte". Essa ideia é útil em diversas situações do dia a dia, como calcular descontos, receitas ou até áreas de figuras.

3.2.2 Escrita irredutível de um número racional

Um mesmo número racional pode ser escrito de várias formas diferentes. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100}$$

Todas essas frações representam a mesma quantidade: a metade de uma unidade. Dizemos que essas frações são **equivalentes**.

No entanto, entre todas as formas possíveis de escrever um número racional, existe uma forma mais simples, chamada de **forma irredutível**. Uma fração está na forma irredutível quando não é possível mais simplificá-la, ou seja, quando o numerador e o denominador não têm nenhum divisor em comum além do número 1.

Exemplo 3.1 *A fração* $\frac{8}{12}$ *pode ser simplificada. Como 8 e 12 têm o número 4 como divisor comum, podemos dividir os dois termos por 4 e escrever:*

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2}{3}$$

Assim, $\frac{2}{3}$ *é a forma irredutível de* $\frac{8}{12}$

Exemplo 3.2 $\frac{45}{60}$ *Podemos usar a fatoração em primos:*

$$45 = 3^2 \cdot 5, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Como 45 e 60 têm os fatores 3 e 5 em comum, o maior divisor comum entre eles é 15. Dividindo numerador e denominador por 15, obtemos:

$$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Graças ao fato de que todo número pode ser decomposto em fatores primos, como vimos anteriormente, é sempre possível simplificar uma fração até chegar na sua forma irredutível.

3.2.3 Soma de números racionais com denominadores diferentes

Como vimos, para somar frações com denominadores iguais, basta somar os numera dores. Mas o que fazer quando os denominadores são diferentes?

Podemos usar o fato de que um mesmo número racional pode ser escrito de diferentes maneiras. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não muda.

Isso nos permite transformar frações com denominadores diferentes em frações com o **mesmo denominador**. Aí, voltamos ao caso anterior.

Exemplo 3.3

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Os denominadores são diferentes. Vamos fazer as duas frações ficarem com o mesmo denominador. O menor número que é múltiplo de 3 e 4 ao mesmo tempo é 12.

Agora ajustamos cada fração:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

Agora que os denominadores são iguais, podemos somar:

$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Regra geral:

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, podemos escrever:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \,.\, d + b \,.\, c}{b \,.\, d}$$

De fato,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b}$$

e então reescrevemos a soma como uma soma de duas frações com o mesmo denomi nador *bd* e segue que a fórmula é verdadeira.

Mais exemplos:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \,.\, 4}{5 \,.\, 4} + \frac{3 \,.\, 5}{4 \,.\, 5} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

3.2.4 Usando o mínimo múltiplo comum para somar frações

Como vimos, uma forma de somar frações com denominadores diferentes é transformar as frações para que tenham o mesmo denominador. A fórmula geral usa o produto dos denominadores, mas isso pode resultar em números grandes e frações que ainda precisam ser simplificadas depois.

Uma forma mais prática é usar o **mínimo múltiplo comum** (MMC) dos denomina dores. O MMC de dois números é o menor número que é múltiplo de ambos ao mesmo tempo. Com ele, conseguimos frações equivalentes que já estão prontas para serem somadas — e geralmente mais simples.

Exemplo 3.4

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$$

Usando a fórmula geral:

$$\frac{1 \,.\, 8}{6 \,.\, 8} + \frac{1 \,.\, 6}{8 \,.\, 6} = \frac{8}{48} + \frac{6}{48} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$$

Com o MMC *de* 6 *e* 8, *que é* 24, *fazemos direto:*

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}, \quad \frac{1}{8} = \frac{3}{24}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

Exemplo 3.5

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$$

MMC *de* 10 *e* 15 *é* 30. *Reescrevendo:*

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}, \quad \frac{4}{15} = \frac{8}{30}, \quad \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$$

Usar o MMC é uma forma mais eficiente de somar frações, pois evita trabalhar com números grandes e já nos dá o resultado numa forma mais simples.

3.2.5 Resumo: como somar e multiplicar números racionais

Soma com denominadores iguais: mantemos o denominador e somamos os numeradores:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

Soma com denominadores diferentes:

– Podemos usar o produto dos denominadores:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\ .\ d+b\ .\ c}{b\ .\ d}$$

– Ou usar o **MMC** dos denominadores para encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador, e depois somar.

Multiplicação de frações: multiplicamos os numeradores e os denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\ .\ c}{b\ .\ d}$$

Multiplicação de inteiro por fração: todo número inteiro *m* pode ser visto como $\frac{m}{1}$, então:

$$m\ .\ \frac{a}{b} = \frac{m\ .\ a}{b}$$

Sempre que possível, simplifique o resultado. A forma mais simples de uma fração é aquela em que o numerador e o denominador não têm divisores em comum além de 1.

3.3 Inverso multiplicativo

Assim como aprendemos que todo número possui um inverso aditivo (ou seja, um número que, somado a ele, dá zero), agora vamos conhecer o **inverso multiplicativo**.

O inverso multiplicativo de um número racional é aquele número que, quando multi plicado por ele, o resultado é 1. Ou seja, se um número racional é representado por uma fração $\frac{a}{b}$ (com a $\neq$ 0), o seu inverso multiplicativo é $\frac{b}{a}$.

Exemplo 3.6 *O inverso multiplicativo de* $\frac{2}{5}$ *é* $\frac{5}{2}$, *pois:*

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$$

Exemplo 3.7 *O inverso multiplicativo de* 4 *pode ser escrito assim: primeiro lembra mos que* $4 = \frac{4}{1}$, *então, o inverso multiplicativo é* $\frac{1}{4}$, *pois:*

$$4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exemplo 3.8 *O inverso multiplicativo de* $-\frac{3}{7}$ é $-\frac{7}{3}$, *pois:*

$$-\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{21}{21} = 1$$

Observação: o número 0 *não possui inverso multiplicativo*, pois não existe ne nhum número que, multiplicado por 0, resulte em 1. Qualquer número multiplicado por 0 é sempre 0.

Normalmente, representamos o inverso multiplicativo do número *x* pelo símbolo x^{-1}. Isto é,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{2}{3}\ , \quad \left(\frac{7}{11}\right)^{-1} = \frac{11}{7}\ , \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3.4 Dividir é multiplicar pelo inverso

No capítulo dos números inteiros, aprendemos que **subtrair** é o mesmo que **somar** o **inverso aditivo**. Por exemplo:

$7 - 3 = 7 + (-3)$

Ou seja, a operação de subtração pode ser vista como uma continuação da adição.

Agora que conhecemos os **inversos multiplicativos**, podemos fazer algo parecido com a divisão: ela também pode ser reescrita como uma multiplicação. Mais precisa mente, **dividir um número pelo outro é o mesmo que multiplicar pelo inverso multiplicativo** desse número. Abaixo, o símbolo "÷" representa divisão.

Exemplo 3.9

$$\frac{6}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Exemplo 3.10

$$\frac{5}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{16}$$

Exemplo 3.11

$$3 \div \frac{4}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$$

Essa maneira de pensar nos ajuda a ver que, assim como a subtração depende da adição, a divisão depende da multiplicação. Por isso, em matemática, podemos considerar que existem apenas **duas operações fundamentais**: a **adição** e a **multiplicação**.

A subtração nada mais é do que somar com o número trocado de sinal (inverso aditivo), e a divisão nada mais é do que multiplicar pelo número invertido (inverso multiplica tivo).

Essa visão mais profunda das operações será muito útil em outros conteúdos e também na resolução de problemas.

Observação. Novamente a respeito da ordem que efetuaremos operações diferentes em uma mesma conta, vimos agora que uma divisão nada mais é que uma multiplicação entre racionais, assim temos que a ordem de prioridade das operações de adição (+), subtração (-), multiplicação (·) e divisão (÷) se trata de: em uma mesma conta, temos uma ordem a ser seguida:

1. Operamos a multiplicação ou a divisão (na ordem que aparecer da direita para a esquerda)
2. Operamos a adição ou a subtração (na ordem que aparecer da direita para a esquerda)

3.5 Representação decimal de números racionais

Nos capítulos anteriores, aprendemos a escrever os números naturais em base 10. Isso significa que cada número é formado por algarismos multiplicados por potências de 10, como nas centenas, dezenas e unidades:

$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Agora, vamos estender essa ideia para representar números que não são inteiros — ou seja, números racionais com parte decimal, como 0,5 ou 3,75.

As frações com potências de 10 no denominador

Vamos começar entendendo o significado das frações que têm como denominador uma potência de 10. Por exemplo:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \ ; \quad \frac{1}{100} = 0{,}01 \ ; \quad \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Essas frações representam partes da unidade em base 10. Repare que:

$\frac{1}{10} \;=\; 0{,}1$ representa uma parte de dez,

$\frac{1}{100} \;=\; 0{,}01$ representa uma parte de cem,

$\frac{1}{1000}$ representa uma parte de mil.

De modo geral, para qualquer número natural *n*, temos:

$$\frac{1}{10^n} \;=\; 0,\ \underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \ zeros}\ 1$$

Abaixo temos mais alguns exemplos:

$$\frac{7}{10} \;=\; 0{,}7 \quad ; \qquad \frac{53}{100} \;=\; 0{,}53 \;; \qquad \frac{208}{1000} \;=\; 0{,}208$$

Isso nos mostra como podemos escrever frações com denominadores iguais a potências de 10 diretamente em forma decimal. Esse tipo de número é chamado de **decimal exato**, porque a parte decimal termina.

Observação: quando uma fração tem denominador igual a 10, 100, 1000 etc., basta contar quantas casas decimais precisamos: uma casa para 10, duas para 100, três para 1000, e assim por diante.

Importante: quando somamos frações com denominadores potências de 10, como:

$$\frac{4}{10} \;+\; \frac{7}{100} \;+\; \frac{2}{1000}$$

o número decimal que representa essa soma é:

0,472

Ou seja, colocamos os algarismos depois da vírgula, respeitando as casas decimais de cada fração:

- o 4 está na casa dos décimos,
- o 7 está na casa dos centésimos,
- o 2 está na casa dos milésimos.

Outro exemplo:

$$\frac{2}{10} \;+\; \frac{0}{100} \;+\; \frac{9}{1000} \;+\; \frac{5}{10000} \;=\; 0{,}2095$$

Se necessário, completamos com zero onde não houver fração correspondente. Por exemplo:

$$\frac{5}{10} \;+\; \frac{3}{1000} \;=\; 0{,}503$$

Até agora, vimos apenas exemplos em que o número decimal começa com **zero antes da vírgula**, como 0,5, 0,25, 0,472 e assim por diante. Mas isso acontece apenas quando a fração representa uma parte da unidade.

Também podemos ter números decimais que representam valores maiores que 1. Por exemplo:

$$1 \;+\; \frac{1}{10} = \; 1{,}1 \qquad e \qquad 3 \;+\; \frac{25}{100} \;=\; 3{,}25$$

Ou seja, o número decimal pode ter uma **parte inteira** (antes da vírgula) e uma **parte decimal** (depois da vírgula). O número 2,75, por exemplo, representa dois inteiros e setenta e cinco centésimos.

Nos próximos tópicos, vamos aprender como transformar outras frações em forma de cimal — mesmo aquelas que não têm potência de 10 no denominador — e veremos que, nesses casos, o número pode ter uma parte decimal que se repete infinitamente (as chamadas **dízimas periódicas**).

3.6 Transformando frações em números decimais

Quando uma fração não tem como denominador uma potência de 10, ainda assim podemos descobrir sua forma decimal. Para isso, usamos o próprio significado da fração: toda fração $\frac{a}{b}$ representa a divisão de a por b. Por exemplo $\frac{1}{2}$ representa a ideia de dividir o número 1 em duas partes iguais. A ideia é reescrever o número em termos de frações que tem denominadores sendo potências de 10. Por exemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Como outro exemplo, consideremos $\frac{1}{4}$

Na divisão de 10 por 4 obtemos quociente 2 e resto 2. Isto é, escrevemos $10 = 2 \cdot 4 + 2$

vale 1

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{4} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{2 \cdot 4 + 2}{4}\right) \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{2 \cdot 4}{4} = 2 \cdot \frac{4}{4} = 2 \cdot 1 = 2$$

e

$$\frac{2}{4} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$$

vale 1

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{100}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 0{,}25$$

E concluímos que $\frac{1}{4}$ se reescreve como 0,25.

Observação: os exemplos anteriores transmitem a ideia de como reescrever uma fração como soma de frações com denominadores sendo potências de 10. No entanto, esse processo pode ser trabalhoso. Felizmente, existe um caminho mais direto: usar a divisão na chave.

Já aprendemos a usar a divisão na chave para dividir um número inteiro a por outro número inteiro b, encontrando o quociente e o resto. Agora, vamos avançar: vamos aprender a usar a divisão para descobrir também a **parte decimal** de um número.

O que há de novo nesse processo é o seguinte:

- quando a divisão não é exata, ou seja, quando sobra um resto diferente de zero, podemos **continuar a conta** colocando uma vírgula no quociente e acrescen tando um zero ao lado do resto;
- assim, conseguimos descobrir os valores decimais da resposta, ou seja, o valor da fração em forma decimal.

Vamos ver como isso funciona na prática com alguns exemplos. Abaixo, apresentaremos divisões feitas na chave que mostram como obter a parte decimal de frações como $\frac{1}{4}$ e $\frac{13}{8}$.

Exemplo 3.12 *Vejamos primeiro a forma decimal de* $\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Como 1 é menor que 4, acrescentamos um 0 à direita e um 0, no quociente. Isto equivale a multiplicar por $\frac{10}{10}$ no procedimento ilustrado acima.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} & 0, \end{array}$$

Então incluímos no quociente o número 2 e subtraímos 8 de 10 obtendo resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} -8 & 0,2 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Como 2 é menor que 4, acrescentamos outro 0 à direita e procuramos o próximo dígito do quociente (5). Como 5 × 4 = 20, obtemos resto zero e o procedimento acaba.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} -8 & 0,25 \\ \cline{1-1} 20 & \\ -20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Exemplo 3.13 *Agora vamos a forma decimal de* $\frac{13}{8}$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

O primeiro dígito do quociente é 1, subtraindo 8 de 13 obtemos o primeiro resto 5.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 1 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Como 5 é menor que 8, acrescentamos um 0 à direita e uma vírgula “,”no quociente.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 1, \\ \cline{1-1} 50 & \end{array}$$

Então obtemos o segundo dígito do quociente (6). Subtraímos 6×8 = 48 de 50 obtendo o segundo resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 1,6 \\ \cline{1-1} 50 & \\ -48 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Acrescentamos um 0 à direita e encontramos o próximo dígito do quociente (2). Então subtraímos 2 × 8 = 16 de 20 obtendo resto 4.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 1{,}62 \\ \cline{1-1} 50 & \\ -48 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -16 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Acrescentamos um 0 à direita e encontramos o próximo dígito do quociente (5). Como 5 × 8 = 40, obtemos resto zero e o procedimento termina.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} -8 & 1{,}625 \\ \cline{1-1} 50 & \\ -48 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -16 & \\ \cline{1-1} 40 & \\ -40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Às vezes, ao fazer a divisão, a conta não termina. A parte decimal continua se repetindo sem parar. Isso ocorre quando, na busca por novos dígitos do quociente, nunca encontramos resto igual a zero — como é o caso, por exemplo, das frações

$$\frac{1}{3} \; e \; \frac{3}{11}$$

como ilustrado a seguir.

Exemplo 3.14 *Vejamos a forma decimal de* $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Como 1 é menor que 3, acrescentamos um 0 à direita e um 0, no quociente. Concluímos que o próximo dígito no quociente o número é 3. Como 3 × 3 = 9 obtemos resto 1.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 9 & 0{,}3 \\ \cline{2-2} 1 & \end{array}$$

Acrescentamos outro 0 à direita e encontramos o próximo dígito no quociente (3), que novamente nos retorna resto 1. O processo se repete infinitamente.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} -9 & 0{,}33\ldots \\ \cline{1-1} 10 & \\ -9 & \\ \cline{1-1} 1 & \\ \vdots & \end{array}$$

Exemplo 3.15 *Agora vamos a forma decimal de* $\frac{3}{11}$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 11 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Acrescentamos um 0 à direita e um 0, no quociente. Obtemos o próximo dígito do quociente (2). Como 2 × 11 = 22, obtemos resto 8.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \hline -22 & 0{,}2 \\ \hline 8 & \end{array}$$

Acrescentamos outro 0 à direita e encontramos o próximo dígito no quociente (7). Como 7 × 11 = 11, obtemos o próximo resto 3.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \hline -22 & 0{,}27 \\ \hline 80 & \\ -77 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Incluímos 0 à direita e achamos o dígito (2) para o quociente, que nos retorna o resto 8, que já havia aparecido. Isso significa que o processo se repetirá infinitamente.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 11 \\ \hline -22 & 0{,}2727\ldots \\ \hline 80 & \\ -77 & \\ \hline 30 & \\ -22 & \\ \hline 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

E temos $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots = 0{,}\overline{27}$.

Ao analisar essas divisões, percebemos um fenômeno interessante: em alguns casos, a divisão nunca chega a um fim. Isso ocorre porque nunca encontramos um resto igual a zero durante o processo. No entanto, como estamos dividindo um número por outro inteiro, existe um número limitado de restos diferentes de zero possíveis: no máximo, $b - 1$ diferentes restos ao dividir por b. Assim, se em algum momento o processo não termina, eventualmente um mesmo resto irá se repetir.

Esse fenômeno é explicado por um raciocínio conhecido como **princípio da casa dos pombos**. A ideia é simples: se colocarmos mais pombos do que casas, pelo menos uma casa terá mais de um pombo. No nosso caso, os "pombos" são os restos que aparecem durante a divisão, e as "casas" são os possíveis valores distintos de restos. Como há um número finito de restos possíveis e o processo continua indefinidamente, em algum momento um resto irá se repetir, e a partir daí os mesmos cálculos se repetirão, fazendo com que o quociente decimal passe a exibir um padrão periódico.

Chamamos esse tipo de representação decimal de **dízima periódica**. Ela ocorre sem pre que, durante a divisão, o processo não termina e aparece esse padrão de repetição. Podemos classificar os números racionais com base em como sua parte decimal se com porta:

- quando a divisão termina, encontramos um resto igual a zero. Isso significa que, a partir de certo ponto, a parte decimal passa a ser composta apenas por zeros. Por exemplo, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ pode ser escrito como 0,250000 . . .. Embora normalmente omitamos esses zeros, trata-se também de uma dízima periódica, cujo dígito que se repete é o zero. Podemos dizer que essa é uma dízima com período 0;
- quando a divisão não termina, aparece um bloco de dígitos que se repete in finitamente. Por exemplo, $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ *e* $\frac{3}{11} = 0{,}\overline{27}$. Usamos a notação com uma barra sobre os dígitos que se repetem para indicar esse comportamento.

Assim, a dízima 0,272727 . . . é representada por $0{,}\overline{27}$.

Portanto, **todo número racional tem uma representação decimal que é uma dízima periódica**. Em alguns casos, o dígito que se repete é o zero, e por isso a repetição não costuma ser escrita. Nos demais, aparece um bloco de um ou mais dígitos que se repete indefinidamente.

A recíproca também é verdadeira: **toda dízima periódica representa um número racional**. Isso quer dizer que, sempre que identificamos uma parte decimal que se repete (ou termina), existe uma fração que gera esse número. Veremos com mais detalhes como demonstrar isso quando estudarmos equações do primeiro grau.

3.7 Exercícios

Exercício 1. Você vai dividir R$120 igualmente entre 4 pessoas. Quanto cada uma vai receber?

Exercício 2. Ana tomou $\frac{2}{5}$ de um litro de suco pela manhã e $\frac{1}{5}$ à tarde. Quanto ela tomou no total?

Exercício 3. Um litro de leite foi dividido entre três copos iguais. Qual foi a fração que cada copo recebeu?

Exercício 4. Um pedreiro precisa de $\frac{3}{4}$ de saco de cimento por metro quadrado. Quantos sacos ele usará para cobrir 4 metros quadrados?

Exercício 5. Calcule:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$

Exercício 6. Calcule: $\frac{5}{6} + \frac{1}{6}$

Exercício 7. Calcule: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

Exercício 8. Resolva: $2 + \frac{5}{8}$

Exercício 9. Resolva: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

Exercício 10. Qual é o resultado de $\frac{3}{7} \cdot 14$?

Exercício 11. Escreva a fração $\frac{6}{8}$ na forma irredutível.

Exercício 12. Reduza $\frac{15}{20}$ à forma mais simples.

Exercício 13. Qual é a forma irredutível de $\frac{21}{28}$?

Exercício 14. Transforme $\frac{45}{60}$ em fração irredutível.

Exercício 15. A fração $\frac{18}{24}$ é irredutível? Justifique e simplifique, se possível.

Exercício 16. Um frasco de remédio contém $\frac{1}{2}$ litro. A dose é $\frac{1}{8}$ de litro. Quantas doses há no frasco?

Exercício 17. Qual é o inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$?

Exercício 18. Qual é o número que multiplicado por $\frac{5}{7}$ resulta em 1?

Exercício 19. Escreva o inverso de $\frac{9}{10}$ e verifique o produto.

Exercício 20. Explique por que 0 não tem inverso multiplicativo.

Exercício 21. Calcule o produto entre $\frac{2}{5}$ e seu inverso multiplicativo.

Exercício 22. Transforme as frações abaixo em números decimais:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

Exercício 23. Complete com (V) ou (F):

a) 0, 5 é igual a $\frac{1}{2}$. ( )

b) Toda fração pode ser escrita como número decimal. ( )

c) $\frac{2}{3}$ é um número racional. ( )

Exercício 24. Daniel quer dividir igualmente 3 pães entre 4 pessoas. Qual fração de pão cada um receberá? Transforme o resultado em número decimal.

Exercício 25. Escreva a fração $\frac{3}{8}$ como número decimal.

Exercício 26. Transforme $\frac{7}{10}$ em decimal.

Exercício 27. Escreva $\frac{5}{6}$ em forma decimal (dica: faça a divisão).

Exercício 28. Represente $\frac{2}{9}$ como número decimal.

Exercício 29. Qual é a forma decimal de $\frac{11}{4}$?

Capítulo 4- Números reais

Ao longo dos capítulos anteriores, estudamos diversos conjuntos de números. Come çamos pelos **naturais**, que usamos para contar. Depois, conhecemos os **inteiros**, que nos permitem representar perdas e dívidas. Em seguida, estudamos os **racionais**, que incluem as frações e permitem representar partes de um todo com muita precisão.

Mas agora surge uma pergunta importante: **será que todos os números que usa mos no nosso dia a dia podem ser escritos como frações**? Ou seja, será que qualquer número que aparece em uma medida, em um cálculo ou em uma conta pode ser escrito como $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$?

A resposta é: **não**. Existem números que **não podem ser representados como frações**. Esses números são chamados de **irracionais**, e vamos conhecê-los agora.

4.1 Números irracionais: quando a fração não é suficiente

Durante muito tempo, os matemáticos acreditaram que todos os números podiam ser escritos como frações. Essa ideia foi defendida por um grupo de estudiosos da Grécia Antiga chamados **pitagóricos**. Mas em certo momento, eles se depararam com um número curioso, que hoje chamamos de **raiz quadrada de 2**, indicado por $\sqrt{2}$.

Esse número aparece naturalmente quando tentamos encontrar uma medida que não conseguimos representar como fração. Para entender o que ele significa, pense na seguinte situação:

Suponha que temos uma folha de papel quadrada, com lados medindo 1 unidade. Se traçarmos uma linha ligando um canto da folha ao canto oposto, na diagonal, a medida dessa linha é maior que 1, mas menor que 2. O número que representa essa medida é justamente o que chamamos de $\sqrt{2}$.

Mas o que significa esse número? O símbolo $\sqrt{2}$ representa o número que, ao ser multiplicado por ele mesmo, resulta em 2. Em outras palavras:

$$\sqrt{2} \;.\; \sqrt{2} = 2$$

Os pitagóricos ficaram muito surpresos ao descobrir que esse número **não** pode ser escrito como fração. Na época, a ideia de que existia um número que não podia ser escrito como fração foi tão chocante que muitos acharam melhor manter isso em segredo. Mas hoje sabemos que esses números existem, e que são muito importantes na matemática e nas ciências. Interessados em entender a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, vejam o apêndice.

Dízimas não periódicas

Já vimos no capítulo passado que todo número racional ao ser transformado em nú mero decimal, sua parte decimal ou termina (como em 0,25) ou forma uma repetição (como em $0,\overline{3}$ *ou* $0,\overline{27}$). Essas representações decimais que repetem algum padrão são chamadas de **dízimas periódicas**, e aprendemos que elas correspondem exatamente aos números racionais.

Mas e os **números irracionais**, que não podem ser escritos como fração? Nesse caso, a parte decimal **nunca termina** e **não apresenta repetição de padrão**. A esses números damos o nome de dízimas não periódicas.

Um exemplo é o número $\sqrt{2}$. Como vimos, ele representa uma quantidade cujo valor exato não conseguimos escrever como fração. Sua representação decimal começa assim:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135$$

Os dígitos continuam indefinidamente, sem formar um padrão que se repete. Por isso, dizemos que a representação decimal de $\sqrt{2}$ é uma dízima não periódica, e isso nos confirma que ele é irracional.

De forma geral, sempre que lidamos com um número irracional no dia a dia, traba lhamos com uma **aproximação**. Como não conseguimos escrever o número completo, usamos alguns de seus primeiros dígitos para representar seu valor de maneira útil. Por exemplo, podemos usar $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ quando quisermos uma aproximação simples. Existem muitos outros números irracionais além de $\sqrt{2}$. Alguns deles são muito famosos e aparecem em diversas áreas da matemática e da ciência. Dois exemplos importantes são:

- o número π, que aparece em medidas envolvendo círculos e tem valor aproximado de 3,14159 . . .
- o número *e*, que surge em estudos sobre crescimento e aparece em diversas fór mulas na matemática. Ele tem valor aproximado de 2, 7182818...

4.2 O conjunto dos números reais

Juntando os números racionais (que podem ser escritos como frações) com os núme ros irracionais (como $\sqrt{2}$), formamos um novo conjunto de números: o conjunto dos **números reais**.

Os números reais incluem:

- os números naturais: 0, 1, 2, 3, . . .
- os números inteiros: . . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . .
- os números racionais: $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, 7, 0,25, . . .
- os números irracionais: $\sqrt{2}$, e, π, . . .

O conjunto dos números reais é indicado pela letra: $\mathbb{R}$

Ou seja, quando escrevemos que um número pertence ao conjunto dos reais, usamos a notação:

$x \in R$

Isso quer dizer que o número *x* é real — ou seja, pode ser racional ou irracional.

Quais operações entre números reais?

Assim como fizemos com os números racionais, também podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir números reais. As quatro operações básicas continuam sendo válidas:

adição: podemos somar dois números reais, como $\sqrt{2} + 3{,}5$
subtração: podemos fazer $\pi - 1$, por exemplo
multiplicação: como em $2 \cdot \sqrt{3}$
divisão: desde que o denominador não seja zero, podemos dividir dois reais, como $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Além disso, as **propriedades** que valiam para as operações com racionais continuam valendo com os reais. Algumas dessas propriedades importantes são:

comutatividade da adição e multiplicação: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
associatividade da adição e multiplicação: $(a + b) + c = a + (b + c)$
distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
elemento neutro: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$
inverso aditivo: para todo número real *a*, existe o número $-a$ tal que $a+(-a) = 0$
inverso multiplicativo: para todo número real a $\neq 0$, existe $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Essas propriedades são muito importantes, pois nos permitem fazer cálculos com segu rança e nos ajudam a desenvolver expressões mais complexas no futuro.

O conjunto dos números reais é extremamente importante na matemática e na vida prática. Com ele, conseguimos representar tanto quantidades exatas (como frações e números inteiros) quanto quantidades aproximadas (como medidas que envolvem raízes ou o número π). Ele nos permite trabalhar com todos os tipos de números que usamos no cotidiano: em medidas, temperaturas, distâncias, contas bancárias e muito mais.

4.3 Potenciação

A potenciação é uma forma de representar multiplicações repetidas de um mesmo número. Vamos aprender essa notação aos poucos, começando pelos casos mais simples.

Expoentes naturais

Quando escrevemos uma potência como a^n, estamos dizendo que o número a deve ser multiplicado por ele mesmo *n* vezes. O número *a* é chamado de **base**, e o número *n*, de expoente. Dizemos que *a* está elevado a *n*.

Exemplo: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Exemplo: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Quando o expoente é 2, dizemos que o número está **elevado ao quadrado**. Isso significa multiplicar o número por ele mesmo:

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

Propriedades da potenciação com expoentes naturais:

Sejam *a* e *b* números reais e *m*, *n* naturais:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m - n} \quad (desde\ que\ a \neq 0)$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(desde\ que\ b \neq 0 \right)$

Expoente zero

Existe uma convenção importante: todo número diferente de zero elevado ao expoente zero vale 1.

$a^0 = 1 \quad (para\ a \neq 0)$

Exemplo: $5^0 = 1$

Exemplo: $(-3)^0 = 1$

Essa regra mantém a coerência das propriedades da potenciação. Por exemplo:

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

Expoentes inteiros negativos

Quando o expoente é negativo, a potência representa o **inverso da potência com expoente positivo**:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (para\ a \neq 0)$$

Exemplo: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Exemplo: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

Com isso, podemos expandir a ideia de potência, com expoentes para além dos números naturais, incluindo os negativos e o zero.

Expoentes racionais: a ponte com as raízes

Se o expoente for uma fração, a potência representa uma **raiz**. Especificamente:

$a^{\frac{1}{n}} = o\ numero\ que\ eleval\ a\ n\ resulta\ em\ a$

Esse número é chamado de **raiz enésima de** *a* e é representado por: $a^{\frac{1}{n}} = {}^{n}\sqrt{a}$

Exemplos:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Se a fração for da forma $\frac{m}{n}$, então:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

Exemplo:

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{2} = 2^{2} = 4$$

Importante: no conjunto dos números reais, não existe raiz quadrada de número negativo. Por exemplo, $\sqrt{-4}$ não é um número real. Isso ocorre porque o produto de dois números negativos é sempre positivo. Assim, não existe número real que, multiplicado por ele mesmo, resulte em um número negativo.

Resumo das propriedades da potenciação (válidas para expo entes racionais também)

Se *a* > 0, *m* e *n* forem números racionais:

$$a^{m} \,.\, a^{n} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$$

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m.n}$$

$$(ab)^{m} = a^{m} \,.\, b^{m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}$$

Essas propriedades nos ajudam a simplificar expressões e resolver problemas com mais facilidade, mesmo quando os números envolvidos são decimais, fracionários ou irracio nais.

4.4 Exercícios

Exercício 1. Calcule: 2^3

Exercício 2. Calcule: 5^2

Exercício 3. Lembrando que a área de um quadrado é dada por l^2 onde l é a medida de seu lado, qual a área de um quadrado que tem lado 6?

Exercício 4. Escreva como potência: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Exercício 5. Observe: $3^4 = 81$. Qual é o valor de 3^3

Exercício 6. Complete a tabela:

Potência	resultado
4^2	
6^2	
2^5	

Exercício 7. Calcule: 10^0

Exercício 8. Uma lâmpada consome 2^4 watts. Quantos watts isso representa

Exercício 9. Calcule a raiz quadrada de 64. Escreva também como potência com expoente fracionário?

Exercício 10. Calcule $121^{1/2}$

Exercício 11. Complete com (V) ou (F):

a) $5^2 = 25$ ( )

b) $\sqrt{36} = 7$ ( )

c) $3^3 = 27$ ( )

Exercício 12. Um terreno quadrado tem área igual a 100 m^2. Qual é o valor do lado do terreno? Use raiz quadrada para justificar.

Exercício 13. Calcule: $\sqrt{144} + 2^3$. Escreva a raiz quadrada como potência com expoente 1/2

Exercício 14. Escreva o número 81 como uma potência com base 3

Exercício 15. Qual é o valor de $2^3 + 3^2 - \sqrt{49}$

Exercício 16. Calcule a raiz cúbica de 8. Escreva também como $8^{1/3}$

Exercício 17. Escreva a raiz quarta de 16 como potência com expoente racional. Qual é o valor?

Exercício 18. Calcule: $27^{1/3} + 4^2$

Exercício 19. O volume de um cubo de lado l vale l^3. Sabendo que um cubo tem volume 125 cm^3. Qual é a medida do lado? Use a raiz cúbica para resolver.

Exercício 20. Qual o valor de $(81)^{1/4} + (16)^{1/2}$

Capítulo 5 - Equações do Primeiro Grau

Agora que já conhecemos os números reais e aprendemos a fazer operações com eles (somar, subtrair, multiplicar, dividir e usar potências), vamos começar um novo tema muito importante: **as equações**.

5.1 O que é uma equação?

Uma equação é uma frase matemática que afirma que duas expressões são iguais. A ideia de equação é bem parecida com uma balança de dois pratos: o lado esquerdo e o lado direito estão equilibrados. Se colocamos ou tiramos algo de um lado, devemos fazer o mesmo com o outro, para manter o equilíbrio.

Por exemplo, veja esta equação:

$x + 3 = 7$

Estamos dizendo que "algum número x, somado com 3, resulta em 7". Resolver essa equação significa **descobrir qual é o valor de** x que torna a igualdade verdadeira.

Chamamos de **equações do primeiro grau** aquelas em que a letra (ou incógnita) aparece com expoente 1, como x, e não x^2, x^3, etc. Vamos estudar neste capítulo as equações do primeiro grau com uma única incógnita, geralmente representada por x.

Exemplo 5.1

$x + 3 = 7$

Nosso objetivo é deixar o x sozinho de um lado da igualdade. Para isso, precisamos "eliminar" o 3 *que está somando. Podemos fazer isso subtraindo* 3 *dos dois lados:*

$x + 3 - 3 = 7 - 3 \Rightarrow x = 4$

Exemplo 5.2

$2x = 10$

Aqui, o x está multiplicado por 2. *Para descobrir o valor de x, fazemos o inverso da multiplicação: dividimos os dois lados por* 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$$

Por que isso funciona?

Como já vimos, uma equação é como uma balança equilibrada. Toda vez que fazemos uma operação nos dois lados — somar, subtrair, multiplicar ou dividir pelo mesmo número — estamos mantendo o equilíbrio.

As **propriedades das operações** que aprendemos (como a distributiva, comutativa e associativa) também são válidas aqui, e nos ajudam a simplificar ou reorganizar as expressões para encontrar o valor da incógnita.

Exemplo 5.3

$3x - 5 = 10$

Primeiro, eliminamos o -5 *somando* 5 *dos dois lados*:

$3x - 5 + 5 = 10 + 5 \Rightarrow 3x = 15$

Agora dividimos os dois lados por 3:

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$$

Exemplo 5.4

$$\frac{x}{4} + 2 = 5$$

Primeiro, subtraímos 2 *dos dois lados:*

$$\frac{x}{4} = 5 - 2 = 3$$

Agora, multiplicamos os dois lados por 4 *para eliminar o denominador:*

$$x = 3 \ . \ 4 = 12$$

Verificando a solução

Depois de resolver uma equação, podemos sempre verificar se a resposta está correta substituindo o valor encontrado na equação original.

Exemplo 5.5 *Na equação* 3x − 5 = 10, *encontramos* x = 5.
Substituindo:
3 · 5 − 5 = 15 − 5 = 10
A igualdade é verdadeira, então a solução está correta.

Resumo

Para resolver uma equação do primeiro grau, usamos as seguintes ideias:

- o objetivo é isolar a incógnita *x* em um dos lados da igualdade;
- a equação é como uma balança: o equilíbrio só se mantém se fizermos a mesma coisa dos dois lados;
- podemos somar ou subtrair o mesmo valor dos dois lados da equação;
- podemos multiplicar ou dividir os dois lados por um mesmo número (exceto zero);
- as propriedades das operações (associativa, distributiva, comutativa) podem ser usadas para reorganizar os termos.

Nos próximos exercícios, vamos praticar essas estratégias com diferentes tipos de equa ções e desenvolver a habilidade de resolver problemas que envolvem equações no dia a dia.

5.2 Dízimas periódicas e equações de primeiro grau

Comentamos no capítulo de números racionais que quando estudássemos equações de primeiro grau entenderíamos melhor a relação entre dízimas periódicas e racionais. Consideremos as dízimas 0,7777 . . . e 0,131313 . . . e encontremos sua representação na forma de fração.

Vamos mostrar isso com a ajuda das equações de primeiro grau. Para isso, usaremos um truque importante: **multiplicar por potências de 10 desloca a vírgula para a direita**.

Por que multiplicar por 10 move a vírgula uma casa para a direita?

Multiplicar um número decimal por 10 tem o efeito de aumentar o valor de cada algarismo em uma posição. Veja o exemplo:

1,2 · 10 = 12 e 0,72 · 10 = 7,2

Ou seja, a vírgula se desloca uma casa para a direita. De modo geral: multiplicar por 10 desloca a vírgula uma casa para a direita; multiplicar por 100 desloca duas casas; multiplicar por 1000 desloca três casas; e assim por diante.

Para entender melhor isso, ilustremos o caso de multiplicar 0, 321 por 100. Lembre-se que $0{,}321 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$.

Então, ao multiplicarmos por 100 obtemos

$$
\begin{aligned}
100\ .\ 0{,}321 &= 100\ .\ \left(\tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{100} + \tfrac{1}{1000}\right)\\
&= \frac{300}{10} + \frac{200}{100} + \frac{100}{1000}\\
&= 30 + 2 + \frac{1}{10}\\
&= 32{,}1
\end{aligned}
$$

e vemos que a vírgula "andou" duas casas para a direita.

Agora vamos aplicar essa ideia para transformar uma dízima em uma equação de primeiro grau.

Exemplo 5.6 *Primeiro fazemos* $x = 0,777....$ *Como o período tem uma casa decimal, multiplicamos os dois lados por* 10:

$10x = 7{,}777\ldots$

Observe que agora as casas decimais de x e de $10x$ são iguais: ambas têm a parte $0{,}777\ldots$.

Vamos subtrair as duas equações:

$10x - x = 7{,}777\ldots - 0{,}777\ldots$

$9x = 7$

$$x = \frac{7}{9}$$

Portanto, $0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$

Exemplo 5.7 *Agora consideremos* $x = 0,1313...$ *Aqui o período tem dois dígitos. Então multiplicamos por* 100:

$100x = 13{,}131313\ldots$

Subtraindo novamente:

$100x - x = 13{,}131313\ldots - 0{,}131313\ldots$

$99x = 13$

$$x = \frac{13}{99}$$

Assim, $0{,}131313\ldots = \frac{13}{99}$

Exemplo 5.8 *Agora considere que o bloco de repetição não comece imediatamente após a vírgula. por exemplo, considere* $x = 0,1252525...$ *Então temos* $10x = 1,2525... = 1 + 0{,}2525...$ *e podemos aplicar a mesma ideia do último exemplo para ver que* $0,2525... = \frac{25}{99}$. *Então*:

$$10x = 1 + \frac{25}{99} = \frac{124}{99}$$

de onde concluímos (após dividir os dois lados por 10) que

$$x = \frac{124}{99}$$

Resumo da ideia

Para transformar uma dízima periódica em uma fração:

1. Dê um nome para o número, por exemplo $x = 0{,}ababab\ldots$.
2. Multiplique por uma potência de 10 que desloque a vírgula até depois do primeiro período.
3. Subtraia as duas expressões para eliminar a parte decimal.
4. Resolva a equação de primeiro grau resultante para obter o número como fração.

5. Se o bloco de repetição não começar imediatamente após a vírgula, reescreva de maneira conveniente.

Esse método mostra como os conhecimentos de equações e de potências de 10 nos ajudam a entender melhor os números com infinitas casas decimais.

5.3 Exercícios

Exercício 1. Resolva a equação: $x + 7 = 15$

Exercício 2. Resolva a equação: $3x = 21$

Exercício 3. Resolva a equação: $2x - 4 = 10$

Exercício 4. Resolva a equação: $5x + 3 = 18$

Exercício 5. Resolva a equação: $10 - x = 3$

Exercício 6. Um número somado com 12 resulta em 25. Qual é esse número?

Exercício 7. O dobro de um número é igual a 36. Qual é esse número?

Exercício 8. A diferença entre um número e 8 é igual a 15. Qual é esse número?

Exercício 9. Um número multiplicado por 7 resulta em 56. Qual é esse número?

Exercício 10. A terça parte de um número é igual a 9. Qual é esse número?

Exercício 11. Converta a dízima periódica $0,\overline{3}$ para uma fração.

Exercício 12. Converta $0,\overline{6}$ em uma fração irredutível.

Exercício 13. Escreva $0,\overline{81}$ como uma fração.

Exercício 14. Um número decimal é $0,\overline{13}$. Converta para fração.

Exercício 15. Uma calculadora mostra o número $0,\overline{72}$. Escreva esse número como fração.

Exercício 16. João comprou um lanche e um suco. O suco custou R$4,00 e o total da compra foi R$13,00. Qual foi o valor do lanche?

Exercício 17. Um pedreiro cobra uma taxa fixa de R$50,00 mais R$30,00 por hora trabalhada. Se ele recebeu R$200,00 por um serviço, quantas horas ele trabalhou?

Exercício 18. Maria comprou 4 camisetas de mesmo valor e pagou R$120,00 no total. Quanto custou cada camiseta?

Exercício 19. Um número somado com seu triplo é igual a 40. Que número é esse?

Exercício 20. Um trabalhador recebe R$1500 fixos por mês, mais uma comissão de R$80 por cada produto vendido. Se ele recebeu R$2300, quantos produtos ele vendeu?

Capítulo 6- Equações do Segundo Grau

Neste capítulo, vamos estudar um novo tipo de equação: as **equações do segundo grau**. Assim como fizemos com as equações do primeiro grau, vamos aprender como resolver essas novas equações utilizando operações e propriedades que já conhecemos, como o uso de potências e raízes.

6.1 O que é uma equação do segundo grau?

Uma equação do segundo grau tem a seguinte forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

Onde:

x é a incógnita (o número que queremos descobrir),

a, b e c são números reais que já conhecemos, com a $\neq$ 0,

x^2 é o termo que torna essa equação diferente: a incógnita está elevada ao quadrado.

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Nosso objetivo continua o mesmo: descobrir os valores de *x* que tornam a equação verdadeira.

6.2 Como resolver uma equação do segundo grau?

Uma das formas mais conhecidas de resolver equações do segundo grau é usando a chamada **fórmula de Bhaskara**. Mas antes de simplesmente usá-la, é importante entender de onde ela vem.

Justificando a fórmula de Bhaskara

Vamos considerar uma equação genérica:

$ax^2 + bx + c = 0$

Nosso objetivo em uma equação é isolar o *x*. Para isso, vamos fazer uma transformação chamada **completar quadrado**.

Primeiro, dividimos toda a equação por *a*, para que o coeficiente de x^2 fique igual a 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora, passamos o termo constante para o outro lado, isto é, subtraímos esse termo dos dois lados da equação:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Vamos agora somar o número que "completa o quadrado". Esse número é:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Adicionando esse valor dos dois lados:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

O lado esquerdo agora se transforma em um quadrado perfeito:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Obs.: A expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ significa o quadrado de uma soma. Se você desenvolver esse quadrado usando a distributiva, verá que realmente aparece o termo $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Vale a pena conferir as contas para entender melhor esse passo.

Agora extraímos a raiz quadrada dos dois lados:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Voltando à fórmula

Subtraindo $\frac{b}{2a}$ dos dois lados:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é a **fórmula de Bhaskara**, que nos permite encontrar as soluções de qualquer equação do segundo grau.

6.3 Usando a fórmula de Bhaskara

Dada a equação:

$ax^2 + bx + c = 0$

Calculamos:

$\Delta = b^2 - 4ac$

E usamos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A quantidade Δ, chamada de **discriminante**, indica quantas soluções reais a equação possui:

$\Delta > 0$ (lemos como "delta maior que zero): duas soluções reais diferentes

$\Delta = 0$: uma única solução real

$\Delta < 0$ (lemos como "delta menor que zero): **nenhuma solução real** (pois não existe raiz quadrada de número negativo.)

Exemplo 6.1 (Duas soluções reais)

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Aqui, $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \,.\, 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{2} = 3 \\ x = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Exemplo 6.2 (Uma única solução real)

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 9 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2 \,.\, 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Exemplo 6.3 (Sem solução real)

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$

Como $\Delta < 0$, a **raiz quadrada de** -3 **não existe entre os números reais**. Então essa equação não possui solução real.

Resumo

1. Equações do segundo grau têm a forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$

2. Podemos resolvê-las usando a **fórmula de Bhaskara**, que vem da técnica de completar quadrados

3. O símbolo ± indica que devemos considerar duas possibilidades: uma positiva e outra negativa

4. Se o número dentro da raiz (Δ) for negativo, não há solução real

Nos próximos exercícios, vamos praticar esses casos e entender como aplicar essas ideias em problemas do cotidiano.

6.4 Exercícios

Exercício 1. Resolva a equação: $x^2 = 49$

Exercício 2. Resolva a equação: $x^2 = 100$

Exercício 3. Resolva a equação: $x^2 - 36 = 0$

Exercício 4. Resolva a equação: $x^2 - 5x = 0$

Exercício 5. Resolva a equação: $x^2 + 7x + 10 = 0$

Exercício 6. Resolva a equação: $x^2 - 3x - 10 = 0$

Exercício 7. Resolva: $2x^2 - 8x = 0$

Exercício 8. Resolva: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Exercício 9. Resolva usando a fórmula de Bhaskara: $3x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercício 10. Resolva usando a fórmula de Bhaskara: $x^2 + 6x + 5 = 0$

Exercício 11. A área de um quadrado é 64 m^2. Qual é o valor do lado do quadrado?

Exercício 12. O produto de dois números consecutivos é 56. Quais são esses números?

Exercício 13. Um terreno retangular tem área igual a 35 m^2. Sabendo que o comprimento é 2 metros maior que a largura, determine as dimensões do terreno. Lembre-se que a área é dada pelo produto da largura pelo comprimento.

Exercício 14. A soma de dois números é 13 e o produto deles é 40. Quais são esses números?

Exercício 15. O quadrado de um número menos 5 vezes esse número é igual a 24. Qual é esse número?

Exercício 16. Um retângulo tem área 50 m^2. Sabendo que o comprimento é o dobro da largura, determine as medidas do retângulo.

Exercício 17. Uma fábrica calcula o lucro de um produto com a fórmula $L(x) = -2x^2 + 12x - 16$. Para quais valores de x o lucro é igual a zero?

Exercício 18. Um triângulo tem área de 60 cm^2. Sabendo que a base mede x cm e a altura $x + 2$ cm e que a área é dada pela metade do produto de base por altura, encontre x.

Exercício 19. Um número somado com seu quadrado resulta em 30. Qual é esse número?

Exercício 20. A diferença entre o quadrado de um número e o dobro desse número é 15. Qual é esse número?

Apêndice. Por que $\sqrt{2}$ não pode ser uma fração?

Ao longo deste material, vimos que todo número racional pode ser escrito como uma fração, ou seja, na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b é diferente de zero. Mas será que todo número é assim? **Será que todo número pode ser escrito como uma fração?** A resposta é **não**. Existem números que não são racionais. Um exemplo muito famoso é o número $\sqrt{2}$, que é a raiz quadrada de 2. Neste apêndice, vamos mostrar que $\sqrt{2}$ não pode ser uma fração. Isso significa que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Como vamos fazer isso?

Vamos usar uma ideia muito comum na matemática, chamada de **demonstração por absurdo**. Funciona assim: a gente **finge que aquilo que queremos negar é verdade** e vê no que isso dá. Se essa suposição nos levar a uma contradição (ou seja, a alguma coisa sem sentido), então sabemos que a ideia original estava errada.

É como dizer:

"Vamos supor que $\sqrt{2}$ é uma fração. Se isso der algum problema, então não pode ser verdade!"

Vamos lá!

Vamos imaginar que $\sqrt{2}$ pode ser escrito como uma fração. Ou seja, existe uma fração $\frac{a}{b}$ com a e b números inteiros (e $b \neq 0$), tal que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

E mais: vamos imaginar que essa fração está na forma mais simples possível. Ou seja, que não dá para simplificar $\frac{a}{b}$ — os números a e b não têm nenhum divisor em comum (nem mesmo o 2). Agora vamos ver no que isso dá.

Primeiro passo: elevar os dois lados ao quadrado

Se $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, então, elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Multiplicando os dois lados por b^2 para "eliminar a fração":

$2b^2=a^2$

O que isso nos diz?

Isso nos diz que a^2 é um número **par,** porque ele é igual a 2 vezes outro número. E se a^2 é par, então a também tem que ser par (porque o quadrado de um número ímpar nunca dá par). Se a é par, então existe um número inteiro k tal que:

$a = 2k$

Substituindo na equação

Vamos substituir $a = 2k$ na equação $2b^2 = a^2$:

$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$

Dividindo os dois lados por 2:

$b^2 = 2k^2$

Agora vemos que b^2 também é par, e isso significa que b também é par.

Mas isso é um problema!

Se a é par e b também é par, então os dois têm 2 como divisor. Isso quer dizer que a fração $\frac{a}{b}$ **poderia ser simplificada**, o que **contradiz** a nossa suposição inicial de que ela já estava na forma mais simples.

Conclusão

Chegamos a uma contradição! Isso significa que nossa suposição inicial — de que $\sqrt{2}$ era uma fração — **não pode ser verdadeira**.

Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma fração. Dizemos, então, que: $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Esse é um dos primeiros exemplos históricos de número irracional. Ele mostra que existem números que, por mais que pareçam simples, não podem ser representados como frações. Isso é algo que surpreendeu até os antigos matemáticos da Grécia!

Capítulo 7

Respostas dos exercícios

7.1 Números naturais

1. $250 + 310 + 190 = 750$ kg

2. $45 \times 6 = 270$ peças

3. $180 \times 5 = 900$ reais

4. $378 + 629 = 1007$

5. $214 \times 3 = 642$

6. $(4 + 3) + 5 = 7 + 5 = 12$ e $4 + (3 + 5) = 4 + 8 = 12$. Isso mostra que a adição é associativa.

7.
a) V
b) V
c) V

8. Total de pacotes: $12 + 15 = 27$
$27 \times 6 = 162$ garrafas

9. $347 + 128 + 525 = 1000$

10. Total de sacolas: $3 + 4 + 5 = 12$
$12 \times 12 = 144$ itens

11. $35 \times 8 = 280$ sacos de cimento

12. $47 \times 12 = 564$ reais

13. $426 \times 24 = 10224$

14. $(3 \times 4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$ e $3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60$. Isso mostra que a multiplicação é associativa.

15.
a) V
b) F (pois $9 \times 0 = 0$)
c) V

7.2 Números inteiros

1. $250 - 320 = -70$ reais (prejuízo de R$70,00)

2. $3 - 7 = -4^0$C

3. $-45 + 45 = 0$ reais (saldo zerado)

4. -6 é o inverso aditivo de $+6$ (pois $6 + (-6) = 0$)

5. $48 \div 6 = 8$ pilhas

6.
a) V
b) V
c) V

7. $90 - 110 = -20$ (prejuízo de 20 caixas)

8.
a) $12 + (-7) = 5$
b) $-5 - (-3) = -5 + 3 = -2$
c) $-9 + 4 = -5$

9. Temperatura mais alta:
3^0C
Temperatura mais baixa:
-2^0C

10. Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

11. 7, 14, 21, 28, 35

12. Menor múltiplo comum entre 3 e 5: 15.

13. 42 é múltiplo de: 2, 3, 6, 7

14. $60 = 2^2.3.5$

15. $84 = 2^2.3.7$

16. Maior fator primo de 105 = 7 , pois $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

17.
a) $36 = 2^2.3^2$
b) $90 = 2.3^2.5$
c) $120 = 2^3.3.5$

18. MDC(48, 60) = 12

19. MMC(12, 18) = 36

20. MMC(12, 18) = 36 minutos → se encontrarão após 36 minutos

21. MDC(36, 48) = 12 → 12 kits
Cada kit: $36 \div 12 = 3$ lápis e $48 \div 12 = 4$ canetas

22. 97 ÷ 5 = 19 (quociente), resto 2
Decomposição: 97 = 5 · 19 + 2

23. 23 ÷ 6 = 3 filas completas, sobra 5 pessoas

24. n = 8 · 7 + 2 = 58

25. 134 ÷ 12 = 11 balas por criança, sobra 2 balas

7.3 Números Racionais

1. 120 ÷ 4 = 30 reais para cada pessoa

2. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ litro

3. $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ litro por copo

4. $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ sacos

5.
a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$

6. $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$

7. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$

8. $2 + \frac{5}{8} = \frac{16}{8} + \frac{5}{8} = \frac{21}{8}$

9. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$

10. $\frac{3}{7} \cdot 14 = \frac{42}{7} = 6$ ou $\frac{3}{7} \cdot 14 = 3 \cdot \frac{14}{7} = 3 \cdot 2 = 6$

11. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

12. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

13. $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

14. $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

15. $\frac{18}{24}$ não é irredutível. $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

16. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1} = 4$ doses

17. Inverso de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$

18. $\frac{7}{5}$, pois $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$

19. Inverso de $\frac{9}{10}$ é $\frac{10}{9}$. Produto: $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$

20. O número 0 não tem inverso multiplicativo, pois não existe nenhum número que multiplicado por 0 resulte em 1. De fato, todo número multiplicado por 0 resulta em 0.

21. Inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$. Produto: $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$

22.
a) 0,5
b) 0,75
c) 0,2

23.
a) V
b) V
c) V

24. $\frac{3}{4} = 0{,}75$ → Cada um recebe $\frac{3}{4}$ de pão ou 0,75 em decimal

25. $\frac{3}{8} = 0{,}375$

26. $\frac{7}{10} = 0{,}7$

27. $\frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$

28. $\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}$

29. $\frac{11}{4} = 2{,}75$

7.4 Números reais

1. $2^3=8$

2. $5^2=25$

3. $6^2=36 \longrightarrow$ Área: $36\ m^2$

4. $2.2.2.2=2^4$

5. $3^3=27$

6.
- $4^2=16$
- $6^2=36$
- $2^5=32$

7. $10^0=1$

8. $2^4 = 16$ wats

9. $\sqrt{64} = 8 \ e \ 64^{1/2} = 8$

10. $121^{1/2} = 11$

11.
a) V
b) F (pois $\sqrt{36} = 6$
c) V

12. $\sqrt{100} = 10$ metros

13. $\sqrt{144} = 12 = 144^{1/2}$, $2^3 = 8$
$12 + 8 = 20$

14. $81=3^4$

15. $2^3 = 8, \ 3^2 = 9, \ \sqrt{49} = 7$
$8+9-7=10$

16. $\sqrt[3]{8} = 2 \ e \ 8^{1/3} = 2$

17. $\sqrt[4]{16} = 2 \ pois \ 16^{1/4} = 2$

18. $27^{1/3} = 3, \ 4^2 = 16, \ 3 + 16 = 19$

19. Volume de um cubo: $x^3 = 125 \rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5$ cm

20. $81^{1/4} = 3 \ e \ 16^{1/2} = 4, \ 3 + 4 = 7$

7.5 Equações do 1 ° Grau

1. $x+7=15 \Rightarrow x=8$

2. $3x=21 \Rightarrow x=7$

3. $2x- 4=10 \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$

4. $5x+3=18 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$

5. $10-x=3 \Rightarrow x=7$

6. $x + 12 = 25 \Rightarrow x = 13$

7. $2x = 36 \Rightarrow x = 18$

8. $x - 8 = 15 \Rightarrow x = 23$

9. $7x = 56 \Rightarrow x = 8$

10. $x \div 3 = 9 \Rightarrow x = 27$

11. $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

12. $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$

13. $0,\overline{81} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$

14. $0,\overline{13} = \frac{13}{99}$

15. $0,7\overline{2} = 0,7 + 0,0\overline{2} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0,\overline{2} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$

16. $x + 4 = 13 \Rightarrow x = 9$ reais

17. $50 + 30x = 200 \Rightarrow 30x = 150 \Rightarrow x = 5$ horas

18. $4x = 120 \Rightarrow x = 30$ reais por camiseta

19. $x + 3x = 40 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$

20. $1500 + 80x \Rightarrow 2300 \Rightarrow 80x = 800 \Rightarrow x = 10$ produtos vendidos

7.6 Equações do 2º Grau

1. $x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\ 7$

2. $x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\ 10$

3. $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\ 6$

4. $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou 5

5. $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2$ 0u -5

6. $x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou -2

7. $2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou 4

8. $x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou -5

9. $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow 1$ ou 3
10. $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow -1$ ou -5

11. $x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ metros

12. Seja x o menor número. Então, $x(x + 1) = 56 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -8$

13. Largura= x, comprimento= x + 2 $x(x + 2) = 35 \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -7$ Resposta: 6 pois não existe largura negativa.

14. Seja x o primeiro número e 13-x o segundo. Produto $x(13-x) = 40 \Rightarrow -x^2 + 13x - 40 = 0$ Solução $x = 5$ ou 8

15. $x^2 - 5x = 24 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$ Solução $x = 8$ ou -3

16. Seja x a largura, então comprimento é 2x. Área: $x \cdot 2x = 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25$
$x = \sqrt{25} = \pm 5$. Como não existe largura negativa, temos $x = 5$.

17. $L(x) = -2x^2 + 12x - 16 = 0 \leftrightarrow x = 2$ ou 4

18. Área: $\frac{x\ (x\ +\ 2)}{2} = 60 \Rightarrow x\left(x\ +\ 2\right) = 120\ \ x^2 + 2x - 120 = 0$ Solução: x=10 (altura 12cm)

19. $x^2 + x = 30 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$ Solução: $x = 5$ ou -6

20. $x^2 - 2x = 15 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ Solução: $x = 5$ ou -3

INSTITUTO
FEDERAL
Goiás

Câmpus
Valparaíso