SEQUÊNCIA DIDÁTICA

WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS
NILTON CEZAR FERREIRA

# O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO PARA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

JATAÍ
2019

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Goiás

*Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática*

**WAGNA MENDES VIEIRA CAMPOS**
**NILTON CEZAR FERREIRA**

# O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO PARA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS SOBRE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Produto Educacional vinculado à dissertação: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU.

**JATAÍ**
**2019**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)**

CAM/des

Campos, Wagna Mendes Vieira.

O desenvolvimento do pensamento algébrico para construção de conhecimento sobre equações de primeiro grau através da resolução de problemas: Produto Educacional vinculado à dissertação "O desenvolvimento do pensamento algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau" [manuscrito] / Wagna Mendes Vieira Campos; Nilton Cezar Ferreira. -- 2019.

38 f.; il.

Produto Educacional (Mestrado) – IFG – Câmpus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2019.

Bibliografias.

1. Pensamento algébrico. 2. Resolução de problema. 3. Equações do Primeiro Grau. 4. Sequência didática. I. Ferreira, Nilton Cezar. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

CDD 512

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F051/19.

# SUMÁRIO

# 1 APRESENTAÇÃO

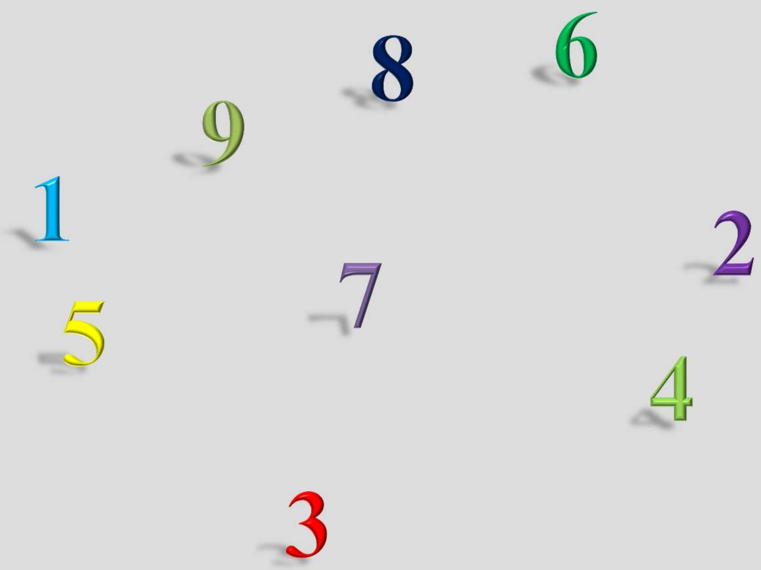
Este material didático foi desenvolvido durante uma pesquisa de Mestrado em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí. Nele é apresentado uma Sequência Didática, elaborada a partir de atividades em sala de aula, visando contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Trata-se de um Produto Educacional destinado a auxiliar professores e professoras que trabalham com turmas dos anos finais do ensino fundamental.

No decorrer desse texto, são apresentadas propostas de atividades com problemas para serem aplicados em sala de aula com o intuito de, durante a resolução desses problemas, por parte do aluno, auxiliado pelo professor, emergir nesse aluno um pensamento algébrico capaz de desenvolver sua capacidade de trabalhar com objetos algébricos como variáveis, incógnitas e, consequentemente, construir conhecimentos dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau.

Para elaboração desse material foram utilizadas atividades que, possivelmente, estejam relacionadas com cotidiano dos alunos, e que tenham alguma ligação com elementos pertencentes aos conteúdos de equações de primeiro grau, tentando sempre tornar o aluno parte ativa do seu processo de aprendizagem. Este material já foi testado em uma turma de sétimo ano do ensino fundamental de uma escola municipal. Para isso, foi elaborado e aplicado um plano de ensino, composto por 22 problemas. Esses problemas foram trabalhados em um período de 30 aulas de cinquenta minutos cada. E, esta Sequência Didática foi construída a partir desse plano de ensino, levando em consideração os melhores resultados obtidos nessa aplicação, após uma análise minuciosa do que ocorreu em sala de aula. Dos 22 problemas trabalhados, foram selecionados 11 para compor este material, aqueles que produziram melhores resultados durante a aplicação do plano de ensino.

Este material inicia-se com uma apresentação teórica sobre Pensamento Algébrico e Resolução de Problemas, buscando inteirar o leitor sobre como identificar e desenvolver esse tipo de pensamento nos estudantes, e, também, como utilizar uma Metodologia através da Resolução de Problemas para auxiliar nesse processo. Após a apresentação dessa parte teórica, é feita uma proposta de como este trabalho pode ser implementado em sala de aula. Essa proposta seguiu o seguinte roteiro: 1) A proposição de um problema, deixando o estudante tentar resolvê-lo durante certo tempo, sem a intervenção do(a) professor (a); 2) A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico; 3) Pedir para que os alunos, que não conseguiram resolver o problema tente novamente, dessa vez com a intervenção do professor(a), por meio de perguntas que levem esses estudantes a pensar algebricamente; 4) Finalmente, o professor reavalia a formar de pensamento dos estudantes e busca relacionar esses pensamentos com elementos relacionados a equações de primeiro grau, se for o caso fazer a formalização do conteúdo a ser introduzido.

Ao término de cada atividade proposta aqui, é apresentado um comentário, evidenciando elementos importantes que ocorreram, durante o teste dessa Sequência Didática, para que o professor(a) possa compará-lo com a sua aplicação. E, no final deste trabalho, são apresentadas algumas considerações para reflexões sobre proposições de novos trabalhos nessa linha, voltados para a sala de aula.



# 2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

O pensamento algébrico é um tipo de pensamento capaz de levar um indivíduo a generalizar ideias a partir de um conjunto de casos particulares, podendo, inclusive, promover condições para que esse indivíduo possa expressar essas ideias generalizadas por meio de discurso, de gestos ou de imagens e, até mesmo, escrevê-la em uma linguagem matemática formal.

O pensamento algébrico apresenta três vertentes, segundo os trabalhos: Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008). Rômulo Lins chama essas vertentes de aritmeticismo, internalismo e analiticidade; Luis Radford as chamam de pensamento factual, contextual e padrão; e James Kaput, que prefere chamar essas vertentes de aritmética generalizada, funcional e modelação.

Não especificaremos as definições apresentadas por esses três pesquisadores, apenas, para cada uma das vertentes, apresentaremos a definição de um dos pesquisadores, e quem tiver mais interesse pode consultar os trabalhos mencionados. A primeira vertente do pensamento algébrico, na concepção de Lins (1992), é o aritmeticismo que significa “modelar, em números, o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo” (p. 12). Nesse caso, o objeto de trabalho é, principalmente, os números, as operações aritméticas e uma relação de igualdade. Esses objetos são vistos como ferramentas para resolver determinadas situações.

A segunda vertente, de acordo com Radford (2009), é chamada de pensamento contextual, cujo o nível de objetivação é mais profundo do que o da ação e percepção, características do pensamento factual.

A terceira vertente, para Kaput (2008), é a modelação. Esse tipo de pensamento constitui-se de um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, ele se dá a partir de situações matemáticas ou de fenômenos como a generalização de regularidades em situações do cotidiano, nas quais a regularidade é secundária, relativamente ao objeto mais geral da tarefa.

Segundo os pesquisadores Rômulo Lins, Luis Radford e James Kaput, pensar algebricamente requer mobilizações da capacidade de estabelecer relações, modelar, generalizar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido e a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem.

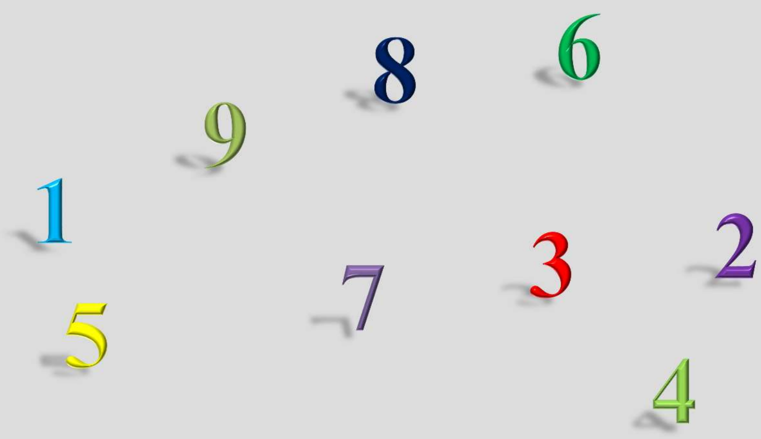
# 3 EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

O primeiro indício do uso de equações, mais formalizada, segundo Pereira (2008), surgiu aproximadamente em 1650 a.C., no documento denominado Papiro de Rhind, que contém a escrita de problemas de matemática.

Um dos primeiros e mais ilustres matemáticos do século IX foi o estudioso Abu Jafar Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî, um astrônomo do califa de Bagdá. Esse matemático árabe escreveu vários livros, mas o que mais se destacou foi o *Hisab al-jabr wa-al-muqa-balah*. Esse livro tratava da resolução de equações semelhante ao sistema aplicado hoje em dia, a diferença é que não utilizava símbolo algum, era tudo representado por palavras. Nesse, o termo *al-jabr*, era muito usado, significa restauração, ou seja, transferir termos de um lado da igualdade para outro, e o termo *qabalah* significa redução, isto e, cancelar ou reduzir termos semelhantes em uma equação, ou seja equacionar. (BIANCHINI, 2015)

Segundo Dante (2015, p. 124), “[equações] são sentenças matemáticas que têm um sinal de igualdade ( = ) e que contém pelo menos uma letra que representa um número desconhecido”. E, segundo ele, uma equação do primeiro grau, com uma incógnita *(x),* é toda equação que pode ser escrita na forma $\boldsymbol{ax + b = 0}$, com $\boldsymbol{a}$ diferente de zero, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números Reais.

Para que ocorram mudanças no ensino de Álgebra, nas escolas brasileiras, é preciso que se contemple, além dos aspectos formais, a concepção de um pensamento algébrico, pois não faz sentido utilizar uma nova linguagem sem que lhe seja dado um significado e sem que exista um sentimento da sua necessidade.



# 4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas enquanto atividade humana tem feito parte do cotidiano das pessoas há milênios, mas ligada às questões relacionadas ao ensino de matemática, e suas contribuições são recentes, ocorridas a partir do século XX.

Com efeito apesar da diversidade de possibilidades que a Resolução de Problemas proporciona, um dos temas ainda muito discutidos é como ela se configura em sala de aula. Segundo Schroeder e Leste (1989), existem três formas de se trabalhar Resolução de Problemas em sala de aula: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar através de resolução de problemas. A seguir, apresentam-se as características de cada uma dessas abordagens.

**a) Ensinar sobre resolução de problemas**: Nessa forma de ensinar, o foco é desenvolver habilidades nos estudantes em resolver problemas. Para isso, Polya (2006) propõe quatro fases que ele afirma serem usadas por especialistas em resolução de problemas, são elas: entender o problema, idealizar um plano, executar o plano e observar o caminho inverso para resolução do problema. Com um trabalho efetivo e constante, acredita-se que o aluno tornar-se-á um bom resolvedor de problemas. Contudo, para alcançar esse objetivo, o professor precisa, adicionalmente, ensinar estratégias que servirão para visualizar ou que serão escolhidas para auxiliar na execução do plano.

**b) Ensinar para resolver problemas:** Segundo Ferreira; Martins; Andrade (2018), nessa abordagem o professor se concentra na maneira como a matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros ou não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento seja importante, o essencial é que o estudante seja capaz de utilizá-la. Ao ensinar nessa abordagem, em geral, o professor apresenta o conteúdo aos alunos, por intermédio de uma definição e suas propriedades, teorema, etc.; apresenta vários exemplos, tentando abranger a maior quantidade de situações possíveis, para que o aluno seja capaz de resolver outros problemas, baseando-se nos exemplos apresentados. O professor que se utiliza dessa abordagem não está preocupado em desenvolver as habilidades do aluno para resolver problemas, ele almeja apenas que o aprendiz seja capaz de reproduzir o que já foi feito, adaptar os procedimentos executados pelo professor e utilizar a matemática aprendida para resolver outros problemas.

**c) Ensinar através da resolução de problemas**: Refere-se ao uso da resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O professor, nessa abordagem, tem por objetivo levar o aluno a produzir um novo conhecimento. O professor propõe um problema e, durante a resolução por parte do aluno tendo o professor como mediador, sendo assim, novos conceitos, conteúdos vão sendo apresentados de forma que o estudante possa construir novos conhecimentos (FERREIRA, 2017).

Onuchic e Allevato (2011) propõem uma metodologia de ensino que elas denominaram Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, cuja base é colocar o aluno como protagonista no processo de ensino e aprendizagem.

Buscando auxiliar professores a trabalhar com essa metodologia elas criaram um roteiro de atividades para ser usado em sala de aula. Esse roteiro é composto pelas seguintes atividades:

***1º Preparação do problema -*** *Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.*

***2º Leitura individual*** - *Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.*

***3º Leitura em conjunto*** - *Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.*

***4º Resolução do problema*** - *A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.*

***5º Observar e incentivar*** – *Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento.*

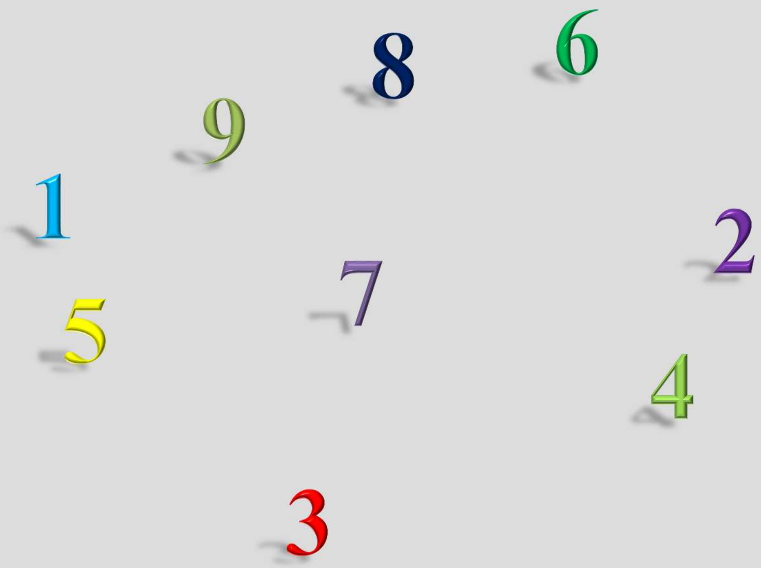
***6° Registro das resoluções na lousa*** – *Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.*

***7º Plenária*** – *Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.*

***8º Busca do consenso*** – *Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe chegar a um consenso sobre o resultado correto.*

***9º Formalização do conteúdo** – Nesse momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal.*

***10º Proposição e resolução de novos problemas** – Analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo de matemática, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.*



# 5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: Proposta de um roteiro de atividades para a sala de aula

Esta sequência didática foi planejada para ser trabalhada em 11 aulas de cinquenta minutos cada, com alunos do sétimo ano do ensino fundamental, cujo objetivo é, primeiramente, identificar a existência de pensamento algébrico nos estudantes e observar em qual vertente esse pensamento manifesta. A partir daí, promover intervenções adequadas para fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico dentro da vertente apropriada para construção de novos conhecimentos.

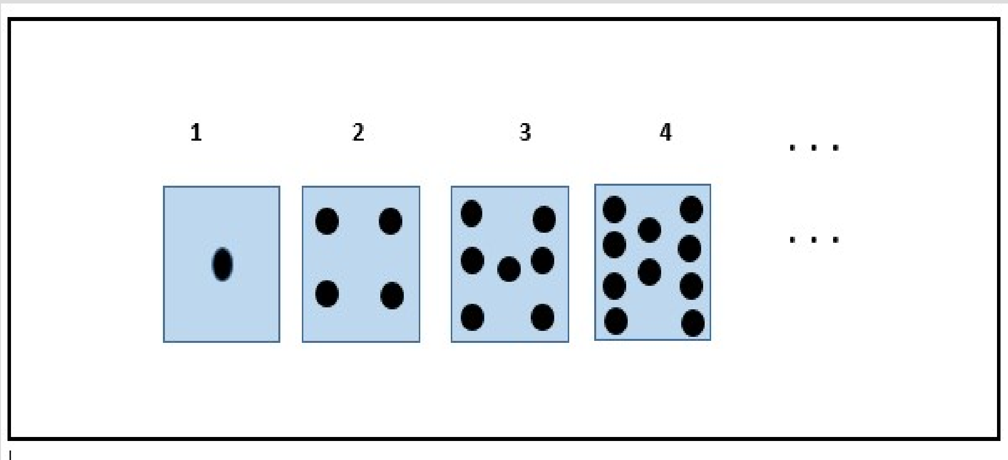
A seguir, apresentamos um roteiro de atividades composto por problemas e instruções para auxiliar professores a trabalhar dessa forma, em sala de aula. Gostaríamos de salientar que este roteiro é apenas uma sugestão para orientar professores que não possuem experiência com esse tipo de trabalho. Diante disso, sugerimos que o professor procure sempre adequar essas atividades, ou produzir suas próprias, à sua realidade e, além disso, busque novos problemas e novas maneiras de fazer esse tralhado, de forma que fique cada vez mais eficiente.

## Primeira Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa, o professor deverá propor o Problema 1, a seguir:

**Problema 1)** Observe a Figura 1 e responda as perguntas a seguir.

**Figura 1 - Sequência de imagens**




Fonte: Adaptado de Souza (2015; 2018)

a) Quantas bolinhas terá a imagem 6 dessa sequência?

b) Quantas bolinhas terá a imagem 8 dessa sequência?

c) Existe, nessa sequência, uma imagem com 17 bolinhas? Explique.

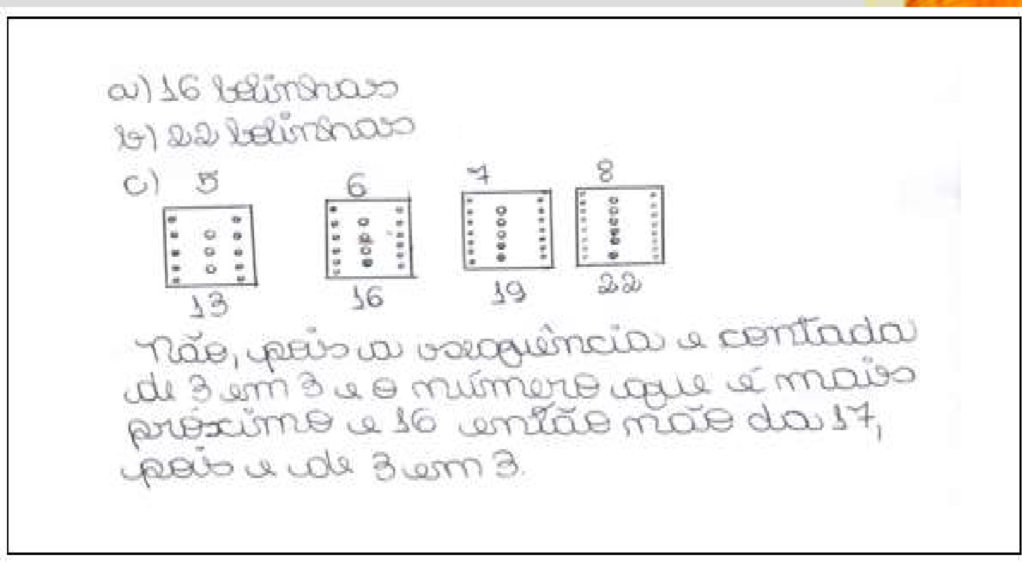
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deve-se deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, deve buscar identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor precisa observar se o aluno percebeu que a quantidade de bolinhas, de uma imagem para a próxima, aumenta sempre em 3. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, o aritimeticismo. Se, além de perceber esse aumento nas bolinhas, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Por fim se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número da imagem e quantidade de bolinhas ou se ele conseguir fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico**.**

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, com intuito de tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas bolinhas tem na primeira imagem? e na segunda? e na terceira? e na quarta? e na quinta? e na centésima?... O número de bolinhas está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de uma imagem para outra?... Como você explicaria o aumento de bolinhas de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número da imagem e a quantidade de bolinhas que ela possui?... Se usássemos um quadrinho para representar o número correspondente a uma imagem qualquer, qual seria o número de bolinhas dessa imagem?... Dentre outras.

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Infelizmente, é possível que, mesmo o professor fazendo um trabalho eficiente, alguns estudantes não consigam desenvolver um pensamento algébrico. Alguns alunos podem demorar muito tempo para começar a pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos que uma aluna desenhou as imagens e criou também um padrão: deixando três bolinhas sem pintar, em cada imagem, dizendo que a sequência caminhava de 3 em 3, conforme a Figura 2:

**Figura 2 - Resolução feita por uma aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna, segundo Kaput (2008), teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico que é perceber a existência de padrão, isso pode ser observado na sequência das figuras desenhadas por ela. Além disso, percebemos, que, de acordo com Radford (2009), ela também raciocinou dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, pensamento contextual, quando escreveu a mensagem de texto “Não, pois a sequência é contada de 3 em 3 e o número que é mais próximo é 16, então não dá 17, pois é de 3 em 3.”, ou seja, ela justificou por meio de palavras o que entendeu.

## Segunda Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa, o professor deverá propor o Problema 2, a seguir:

**Problema 2)** Larissa tem R$ 20,00 a mais que Carlos, e juntos eles têm exatamente a quantia necessária para comprar dois DVDs, ilustrado pela Figura 3:

**Figura 3: DVDs**


Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

Quantos reais tem cada um deles (Carlos e Larissa)?

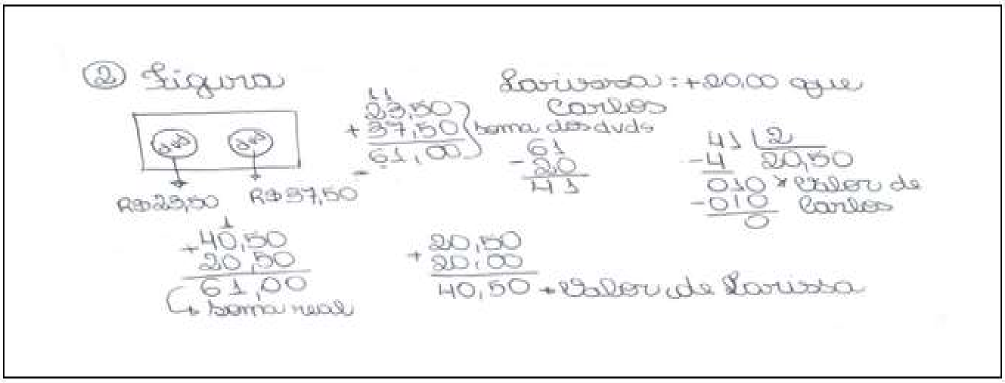
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixe o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, deve buscar identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor precisa observar se o aluno percebeu que a soma dos valores que Larissa e Carlos têm é igual a soma dos valores dos dois DVDs, ou seja, 23,50 + 37,50 = 61,00, e que uma parte dessa soma é o que Larissa tem, e a outra parte é o que Carlos tem. E, ainda que na parte de Larissa deve ter R$ 20,00 a mais. Uma forma de evidenciar essa percepção do aluno pode ser vista quando o aluno tenta achar a resposta por tentativa e erro, isto é, primeiro dividindo os valores em duas partes; em seguida, começar a retirar de uma e passar para a outra, tentando chegar a dois valores em que um deles tem 20 unidades a mais que o outro. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além disso, o estudante for capaz de explicar essa relação por meio de figuras, ou linguagens escrita ou falada, ou por gestos, ele teve um pensamento algébrico contextual, segunda vertente. Se o estudante conseguir explicar de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras para expressar os valores envolvidos para construir uma relação de igualdade, envolvendo esses valores, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, ou seja, teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber e existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos reais Larissa tem a mais que Carlos para comprar os DVDs? Carlos tem a mesma quantia que Larissa? Qual é a quantia que Larissa e Carlos têm juntos? ... se um aluno apresentar uma solução errada, o professor pode, por meio de perguntas, fazer esse aluno perceber que no resultado dele, ou a soma não dá 61 ou Larissa não tem 20 a mais que Carlos. Depois disso, o professor pode, com perguntas adequadas, tentar levar os estudantes a equilibrar a quantia, levando em consideração que um lado deve ter 20 a mais que o outro. Nesse momento, o professor pode incentivar o aluno a usar palavras, letras ou outros símbolos para representar os valores de Larissa e de Carlos, fazendo assim emergir neles a terceira vertente do pensamento algébrico.

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a formar de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativas para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Infelizmente, como já dissemos, é possível que, mesmo o professor fazendo um trabalho eficiente, alguns estudantes não consigam desenvolver um pensamento algébrico. E, alguns estudantes podem demorar muito tempo para começar a pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos que uma das alunas, conseguiu interpretar o problema. Ela desenhou uma figura representando os DVDs, usou o princípio aditivo e multiplicativo, mostrando a presença da primeira e da segunda vertente do pensamento algébrico. A solução apresentada por essa aluna é ilustrada pela Figura 4:

**Figura 4 - Resolução feita pela aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

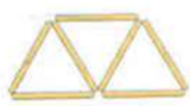
Observe que para resolver o Problema 2, essa aluna apresentou, de acordo com Lins (1992), um raciocínio na vertente do aritmeticismo, isto é constatado quando ela utiliza as operações de adição e divisão com números naturais, buscando generalizar um caso particular. Também a capacidade de estabelecer relação entre quantidades, mostrando a soma das quantidades dos valores de DVDs para encontrar o valor de Larissa e de Carlos.

## Terceira Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor(a) deverá propor o Problema 3, a seguir:

**Problema 3)** Uma sequência de figuras geométricas foi construída utilizando palitos, como é mostrado na Figura 5.

**Figura 5: Sequência de figuras geométricas construídas com palitos**

| **Número da figura geométrica** | **1** | **2** | **3** | **4** | **...** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Figuras geométricas formada por palitos** |  |  |  |  | ... |
| **Quantidade de Palitos** | **1** | **3** | **5** | **7** | ... |

Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

a) Quantos palitos deverá formar a figura geométrica 7?

b) Quantos palitos formará a figura geométrica 12?

c) Qual é o perímetro da figura geométrica 10?

d) Qual figura é formada pela figura geométrica 12, e qual é o seu perímetro 12?

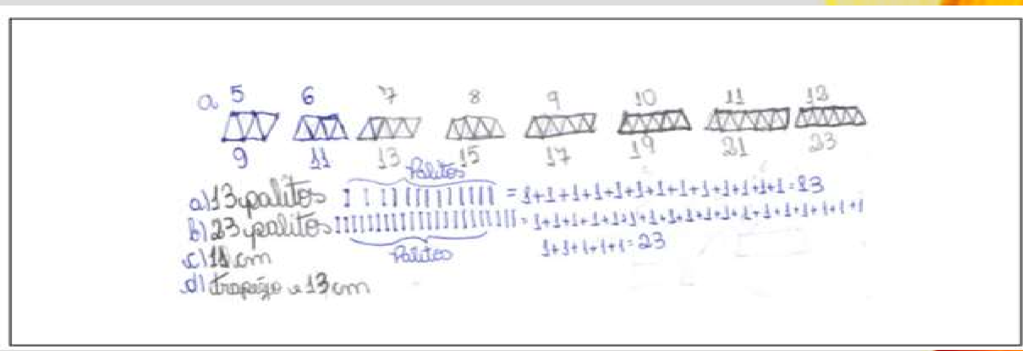
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deve-se deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual precisa apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que a quantidade de palitos de uma imagem para a próxima aumenta sempre em 2. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se o estudante conseguir perceber e argumentar que, a partir da 3ª figura, têm-se apenas dois tipos de figuras geométrica, trapézios e losangos, o estudante evidenciou um pensamento dentro da segunda vertente. Isso pode ser identificado se ele conseguir perceber que os trapézios são formados para as figuras de números pares e losangos para as de números ímpares. Se ele conseguir formalizar a relação encontrada por meio de uma representação por letras ou palavras que representam esses valores, tem-se aí uma terceira vertente de pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos palitos tem na primeira imagem? E na segunda? E na terceira? E na quarta? E na quinta? E na centésima?... O número de palitos está aumentando ou diminuindo? quando passamos de uma figura para a outra que mudança ocorre na figura geométrica? que relação existe entre o número da figura e a figura geométrica? na figura 3, qual é a figura geométrica? e na figura 5? e na figura 7? e na figura 9 palitos? o que você consegue concluir disso?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a formar de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma aluna desenhou uma continuação para sequência de figuras geométricas, Figura 6, e escreveu abaixo de cada figura geométrica o número de palitos dessa figura, conforme pode ser observado a seguir:

**Figura 6 - Resolução feita por uma aluna**



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Lins (1992), a aluna teve um pensamento dentro do aritmeticismo quando utilizou o princípio aditivo na resolução dos itens "a)" e "b)" ao somar, de 1 em 1, a quantidade de palitos para formar a figura geométrica, e um pensamento algébrico contextual ao desenhar as figuras e expressar o aumento de 2 em 2, de uma para outra.

## Quarta Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 4, a seguir:
**Problema 4)** Considere uma máquina capaz de modificar qualquer valor numérico introduzido em sua entrada, de acordo com o que é mostrado na Figura 7. Observando o funcionamento desta máquina, responda:

**Figura 7: Máquina**


Fonte: Adaptado Dante (2015; 2018)

a) Se Márcio colocasse R$ 20,00 na entrada dessa máquina, quanto sairia?

b) Robson colocou na máquina o número – 10, que número saiu?

c) Que quantia Carla deverá pôr na máquina para sair R$ 50,00?

d) Anderson colocou o número 3,2; Quanto ele deveria colocar a mais para sair o número 17?

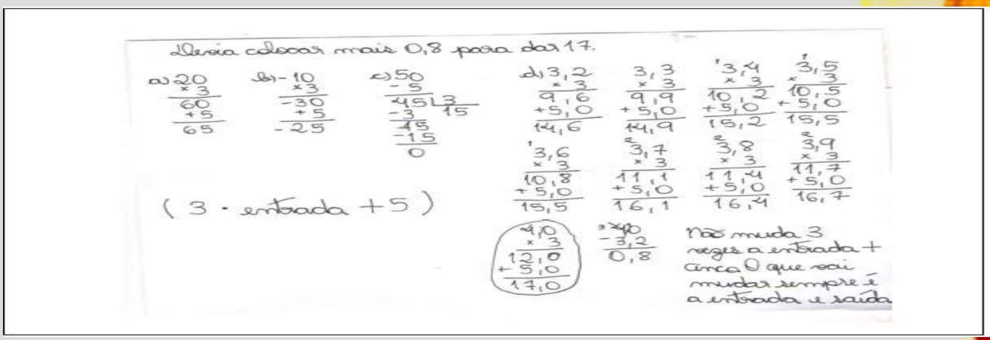
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu uma generalização da aritmética, isto é, que qualquer valor colocado sofrerá as mesmas operações e, consequentemente, a diferença entre os resultados de dois valores consecutivos será sempre a mesma. Se o estudante percebeu esse, ou outro, padrão ele está com um pensamento dentro da primeira vertente. Se o aluno conseguir expressar isso, então ele se encontra dentro da segunda vertente do pensamento algébrico, ou seja, se ele for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento contextual. Se o estudante conseguir expressar essas ideias de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras para escrever uma relação entre a entrada de dinheiro e sua saída, ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Se você colocar na máquina R$ 50,00, quanto você receberia? E se colocasse R$ 70,00? E se colocasse R$ 30,00? E se colocasse R$ 35,00?... Que quantia deve-se colocar na máquina para sair R$ 100,00?... se você chamar de x a quantidade que você colocar na máquina, como você poderia expressar o valor da saída?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma das alunas que participou da aplicação dessa atividade usou o princípio multiplicativo do pensamento algébrico, generalizando ao dizer que o que muda é o valor da entrada e saída, isso pode ser constatado pela resolução apresentada por ela, conforme a Figura 8:

**Figura 8 - Resolução feira pela uma Aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

A aluna utilizou um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, o aritmeticismo, ressaltado por Lins (1992), ao usar a operação de adição, e da multiplicação nesse processo de generalização, e um pensamento um contextual, segunda vertente, no entendimento de Radford (2009), ao escrever o texto: "*Não muda 3 vezes a entrada mais cinco. O que vai mudar sempre é a entrada e saída*".

## Quinta Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 5, a seguir:

**Problema 5)** Sandra alugou um carro popular na locadora LOCBEM. O preço de locação estava indicado, na porta da locadora, pelo cartaz apresentado na Figura 9, a seguir:

**Figura 9 - Cartaz com preço de locação**


Fonte: Adaptado Souza (2015; 2018)

Sabendo que Sandra alugou o carro por um dia e pagou pela locação R$ 270,00, determine quantos quilômetros ela percorreu.

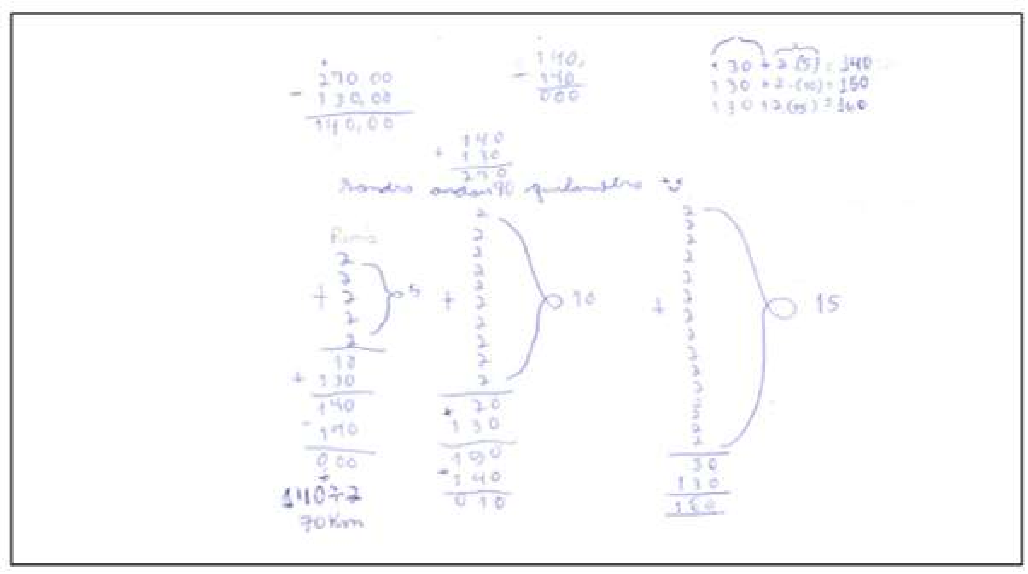
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor. O professor deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que o valor da diária para locação do veículo é fixo, e o que varia são os quilômetros rodados que custa R$ 2,00 cada. Se isso acontecer de forma que o estudante evidencie um processo de generalização, ele teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo, ou seja, se ele perceber que para locar um veículo, o valor da diária é R$ 130,00 mais 2 vezes a quantidade de quilômetros rodados. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a diária e os quilômetros rodados para locação do veículo, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Se a diária para locação do veículo fosse R$ 150,00 ao invés de R$ 130,00 o que mudaria? e se fosse R$ 70,00? e se fosse R$ 35,00?... Se mudasse agora o valor pago por quilômetros rodados, alteraria a resposta do problema? Se usássemos uma letra para representar a quantidade de quilômetros rodados, como poderíamos expressar o resultado?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. No trabalho que fizemos, observamos, no momento da aplicação desse problema, que o método que uma aluna resolveu foi interessante, pois ela montou um esquema prático relacionando quantas vezes o número dois poderia repetir. No primeiro momento, pensamos que ela tivesse cometido um erro, mas analisando com mais cuidado, percebemos que a solução estava correta e o método utilizado por ela fazia sentido. Apresentamos a solução dessa aluna na Figura 10:

**Figura 10 - Resolução feira pela uma Aluna**



Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna utilizou a primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico. De fato, na perspectiva de Lins (1992), essa aluna percebeu um processo de generalização por meio de cálculos com as operações de adição e subtração, como: *"2 + 2 + 2+ 2 + 2 = 10 ; 10 + 130 = 140; 140 – 140 = 0; 140 / 2 = 70"*, e também apresentou um pensamento dentro da segunda vertente, quando percebeu uma generalização do método usado para obter os resultados. Porém usando apenas números como a expressão *"130 + 2 x (5) = 140."* O fato dessa generalização não ter sido traduzida para uma linguagem algébrica, isto é, utilizando letras, palavras ou símbolos, não usuais, para representar os números, ela não evidenciou um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico

## Sexta Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 6, a seguir:

**Problema 6)** Pedrinho tem nove cédulas que somadas dão R$ 93,00. Essas cédulas são de R$ 1,00, R$ 5,00,R$ 10,00 e R$ 50,00. Quantas cédulas de cada valor Pedrinho poderia ter?

**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, se o aluno perceber que a soma dessas cédulas de R$ 1,00, R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 50,00, não podem ultrapassar o valor de R$ 93,00 e que isso para isso ele deve selecioná-las começando, por exemplo, com a maior (ou a menor), ou que se fosse outro valor deveria seguir uma ideia semelhante, ele está dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a quantidade de cada cédulas que Pedrinho tem de cada valor, esse estudante conseguir fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Qual o número máximo de cédulas de R$ 1,00 Pedrinho poderia ter? e cédulas de R$ 5,00? Pedrinho pode ter 2 cédulas de R$ 5,00? Explique? Pedrinho pode ter 3 cédulas de R$ 10,00? Explique? Pedrinho pode ter 2 cédulas de R$ 50,00? Explique?

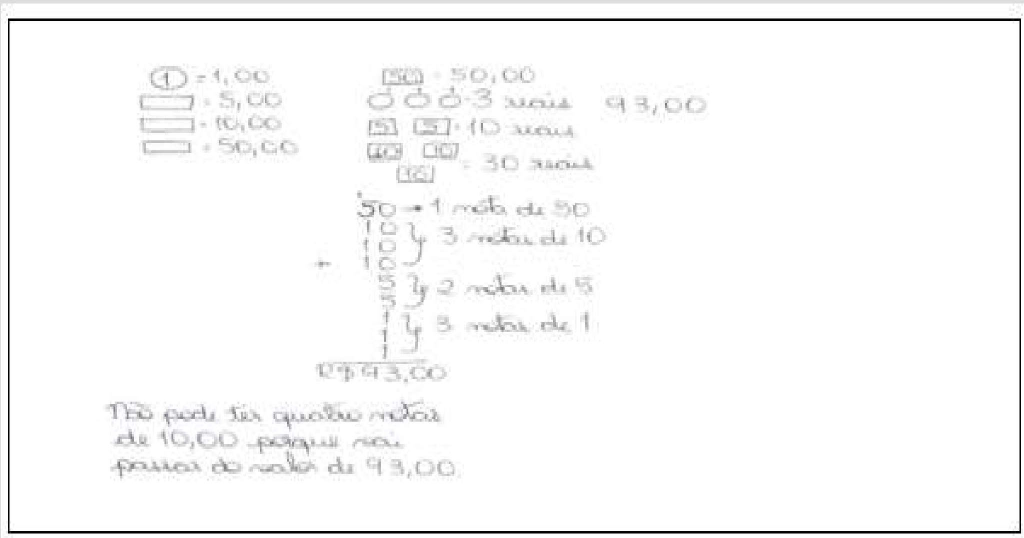
**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma maneira interessante de envolver os estudantes nesse processo seria convidá-lo para ir a lousa apresentar sua resolução. Isso foi feito durante a aplicação do nosso plano de ensino, como é mostrado pela Figura 11:

**Figura 11 - Resolução feira pelo o Aluno**

Fonte: Dados da pesquisa

Além da resolução do aluno, mostrado na Figura 11, uma aluna resolveu esse problema, e apresentou a solução mostrada na Figura 12.

**Figura 12 - Resolução feira por uma Aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

O aluno que foi a lousa e a estudante cuja resolução é mostrada pela Figura 12 desenvolveram um pensamento algébrico dentro da primeira vertente, quando separaram as notas e somaram os seus resultados, percebendo um método que poderia sempre ser usado de maneira geral, que apresentaria erros, mas que poderiam ser corrigidos. Essa forma, segundo Lins (1992), caracteriza-se como aritmeticismo, pois explora a ideia de igualdade dentro de um processo de generalização. Isso pode ser observado quando ela apresentou a expressão "50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 93", e, também, explicitaram um padrão real, por meio de desenhos de moedas e as cédulas, desenvolveram também, um raciocínio dentro da segunda vertente do pensamento algébrico

## Sétima Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 7, a seguir:

**Problema 7)** Assaí Atacadão (Redes de atacados no Brasil) comercializa grandes variedades de produtos, abrangendo alimentos frescos, como verduras, frutas e peixes. Dentre esses produtos são comercializados arroz, mercearia, alimentos, perecíveis, embalagens, bazar, higiene, bebidas e limpeza. No dia 20 de agosto de 2018, o saco de 5 quilos de arroz da marca Gol estava de R$ 9,99. Quanto custariam 2 sacos desse arroz? E quanto custariam 3 sacos dele? E se fossem 4 sacos de arroz? E se fossem 5 sacos de arroz? E se fossem 999 sacos de arroz?

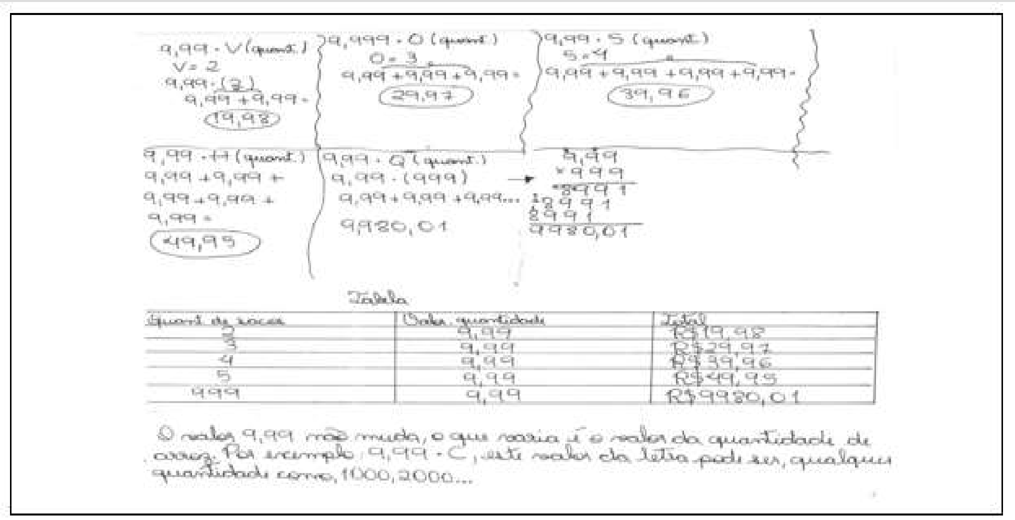
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que o valor do saco de arroz é fixo de R$ 9,99, podendo variar a quantidade de pacotes comprados. Se o estudante perceber que a variação do valor a ser pago decorre exclusivamente da variação de quantidade, ele teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Dentro dessa primeira vertente ele também poderá perceber que, quanto mais quantidade de saco de arroz levar maior será o valor a pagar, e se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a quantidade do saco de arroz e o valor que ele deverá pagar pela compra, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quanto você pagará em 2 sacos de arroz? E em 4 sacos de arroz? E em 20 sacos de arroz? E em 1000?... O valor a pagar aumenta ou diminui?... Se usássemos uma letra, como por exemplo q, para representar a quantidade de sacos de arroz como a gente poderia expressar o valor total a ser pago?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 13, mostra a resolução de uma aluna.

**Figura 13 - Resolução feira por uma Aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com as ideias de Lins (1992), a aluna utilizou um pensamento quantitativo, ao conseguir perceber numericamente um processo de generalização. De acordo com Radford (2009), ela apresentou o pensamento contextual, evidenciado no trecho "*O valor 9,99 não muda, o que varia é o valor da quantidade de arroz*", e o pensamento padrão, ao utilizar letras para representar os valores desconhecidos como pode ser visto no trecho "*9,99.V* ".

## Oitava Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 8, a seguir:

**Problema 8)** Uma fábrica de roupas produz 15 peças de calças por hora. A quantidade de calças é registrada pelos jovens aprendizes (são jovens menores de idade que são contratados temporariamente pelas empresas). Responda, na tabela, abaixo, qual o valor correspondente a cada quantidade de calças que são fabricadas por hora?

**Tabela 1 - Produção de calças**

| Tempo (horas) | Números de calças |
|---|---|
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 1000 | |

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

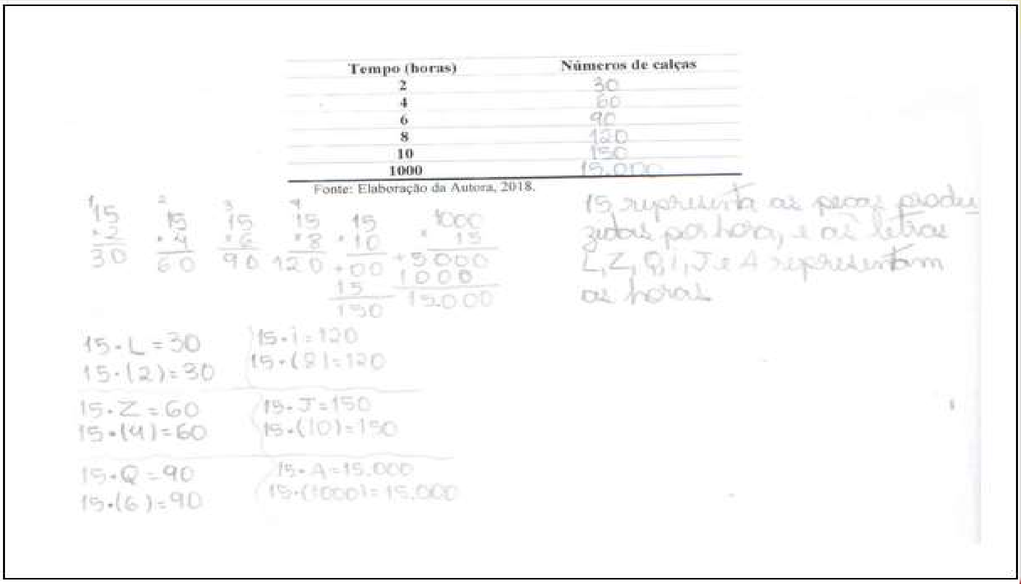
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentivá-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que o número de calças produzidas é proporcional ao tempo de produção, isto é, se ele conseguiu perceber um processo de generalização em que ele poderia determinar a quantidade de calças produzidas conhecendo apenas o tempo, em horas, de produção. Se isso acontecer o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além disso, ele for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, para representar a quantidade de calças produzidas por horas pela fábrica, esse estudante conseguiu fazer uma modelação, isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante, pelo o que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir neles um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que faça o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas calcas são produzidas em 1 hora? e em 2 horas? e em 12 horas? e em 20 horas?... O número de calças está aumentando ou diminuindo? se usássemos uma letras, por exemplo h, para representar o número de horas, como poderíamos calcular a quantidade de calças produzidas?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacioná-la, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Figura 14, apresentamos uma das soluções evidenciadas durante a aplicação do nosso plano de ensino.

**Figura 14 - Resolução feira por uma Aluna**



| Tempo (horas) | Números de calças |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 4 | 60 |
| 6 | 90 |
| 8 | 120 |
| 10 | 150 |
| 1000 | 15.000 |

Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

15 representa as peças produzidas por hora, e as letras L, Z, Q, I, J e A representam as horas

$15 \cdot L = 30$
$15 \cdot (2) = 30$

$15 \cdot Z = 60$
$15 \cdot (4) = 60$

$15 \cdot Q = 90$
$15 \cdot (6) = 90$

$15 \cdot I = 120$
$15 \cdot (8) = 120$

$15 \cdot J = 150$
$15 \cdot (10) = 150$

$15 \cdot A = 15.000$
$15 \cdot (1000) = 15.000$

Fonte: Dados da pesquisa

Essa aluna permeou a primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico e começou a entrar na terceira vertente. De fato, ela utilizou letras para representar um valor que varia, como como pode ser visto no trecho "*15x L; 15xZ, 15x*".

## Nona Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 9, a seguir:

**Problema 9)** Observe a sequência das imagens feita por Sônia na Figura 15.

**Figura 15: Sequências de estrelas amarelas**


Fonte: Elaboração da Autora, 2018

Se Sônia continuasse desenhando estrelas, de acordo com o padrão apresentado por essa figura:

a) Quantas estrelas teria no 5° termo?

b) Quantas estrelas teria o 6° termo que Sônia determinará?

c) Qual o 100° termo que Sonia determinará? Explique sua resposta?

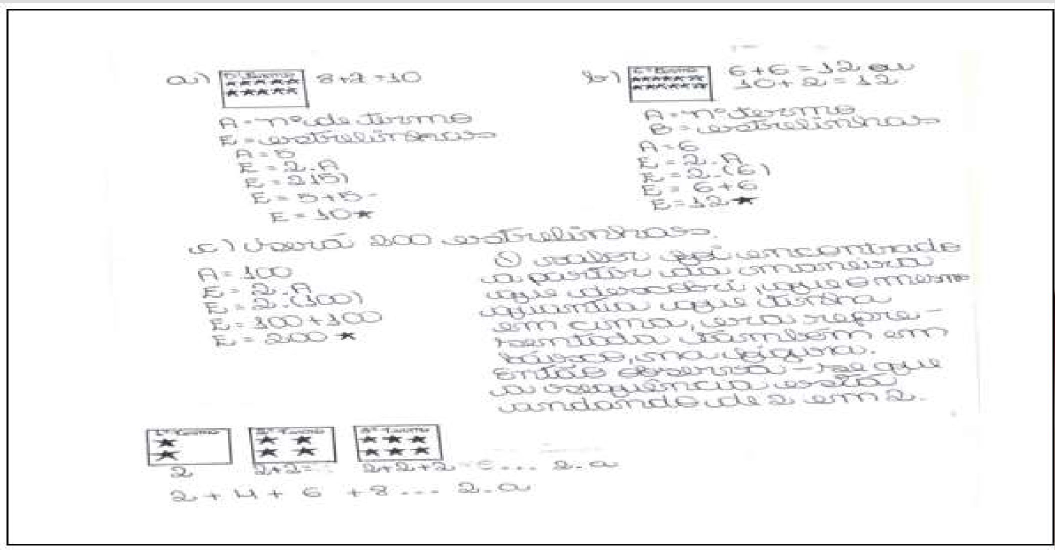
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor deve observar se o aluno percebeu que a quantidade de estrelinhas de uma imagem para a próxima aumenta sempre em duas. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritimeticismo. Se, além de perceber esse aumento nas estrelinhas, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número da imagem e quantidade de estrelinhas isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantas estrelinhas tem na primeira imagem? E na segunda? E na terceira? E na quarta? E na quinta? E na centésima?... O número de estrelinhas está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de uma imagem para outra?... Como você explicaria o aumento de bolinhas de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número da imagem e a quantidade de estrelinhas que ela possui?... Se eu usasse uma letra, por exemplo *n*, para representar o número correspondente a uma imagem qualquer, qual seria o número de estrelinhas dessa imagem?... Dentre outras.

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 16 apresenta uma das resoluções que surgiram durante a aplicação desse problema.

**Figura 16 - Resolução feira por uma Aluna**



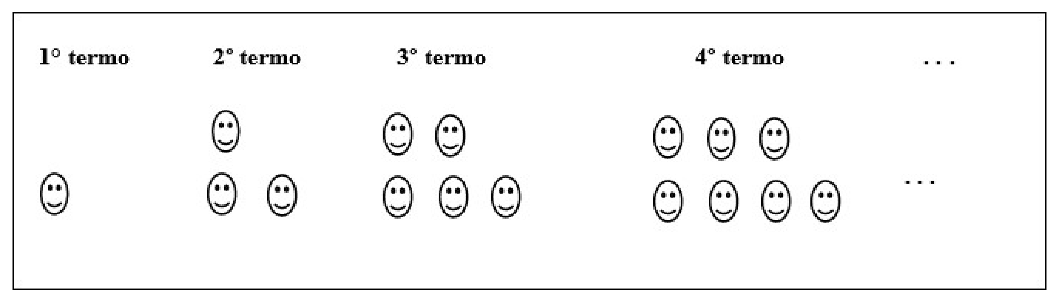
Fonte: Elaboração da Autora, 2018

A aluna, cuja a sua resolução é apresentada na Figura 16, apresentou um raciocínio dentro da primeira e segunda vertentes do pensamento algébrico, ao perceber a generalização que pode ser expressa somando dois a dois às figura e, em seguida, conseguir escrever essa generalização de várias formas e, ainda, atribuir letras para representar valores dessa sequência. Na concepção de Lins (1992), Radford (2009) e Kaput (2008), a aluna teve um pensamento que transitou entre aritmeticismo, contextual e de modelação.

## Décima Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 10, a seguir:
**Problema 10)** Observe a sequência das imagens feita por Katia, na Figura 17.

**Figura 17: Sequências de rostinhos**




Fonte: Elaboração da Autora, 2018.

a) Quantas figurinhas deverá ter o 5° termo da sequência desenhada por Katia?
b) Quantas figurinhas deverá ter o 6° termo da sequência desenhada por Katia?
c) Qual o 1000° termo que Katia determinará? Como você encontrou a resposta? Explique sua resposta?

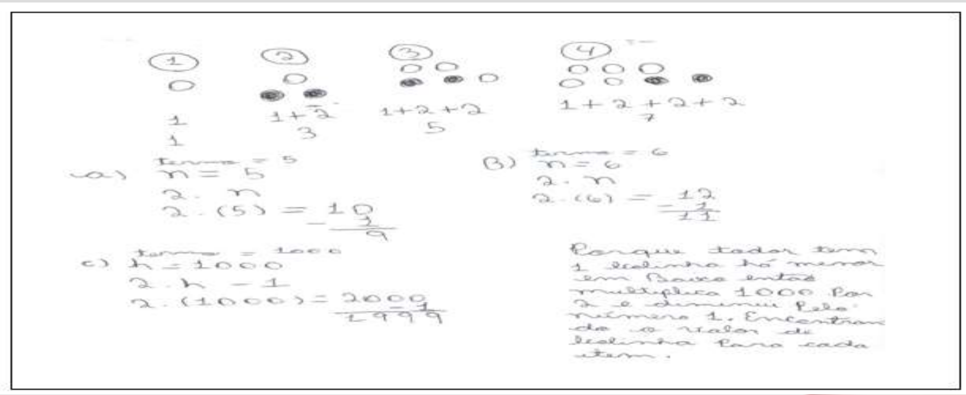
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor(a) sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que a quantidade de rostinhos de em qualquer termo, é o dobro do número do termo menos um. Se isso acontecer, o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritmeticismo. Se, além dele perceber essa relação, entre o número do termo e quantidade de rostinhos que ele possui, o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização por meio de um discurso, imagem ou gestos, esse aluno teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre o número do termo e quantidade de rostinhos isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico**.**

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Quantos rostinhos tem no primeiro termo? E n segundo? E no terceiro? E no quarto? E no quinto? E no centésimo?... O número de rostinhos está aumentando ou diminuindo? Aumenta muito de um termo para outro?... Como você explicaria o aumento de rostinhos de uma imagem qualquer para a próxima? Que relação existe entre o número do termo e a quantidade de rostinhos que ele possui?... se usássemos uma letra, por exemplo n, para representar o termo, como poderíamos expressar a quantidade de rostinhos?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos, buscando novas alternativa para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. A Figura 18 apresenta uma solução feita por um dos alunos, durante a aplicação desse problema em sala de aula.

**Figura 18 - Resolução feira por um Aluno**




Fonte: Dados da pesquisa

O aluno usou letras diferentes para representar cada momento, descobrindo uma relação entre um termo e a quantidade de carinhas “*2n -1*”. Para encontrar a quantidade de bolinhas em cada imagem, ele representou as bolinhas do início e as demais foram aumentadas de 2 em 2, percebendo um padrão. Assim, podemos perceber primeira, segunda e terceira vertentes do pensamento algébrico. Esse aluno utilizou o pensamento contextual também para escrever o que entendeu sobre problema e contextualizando sua resolução, como pode ser observado no trecho, escrito pelo aluno “*Porque todos tem uma bolinha a menos em baixo*”.

## Décima Primeira Aula

**1°) Proposição do problema:** Nessa etapa o professor deverá propor o Problema 11, a seguir:
**Problema 11)** João é primo de Daniel, sua idade é o triplo da idade de Daniel acrescida de 6 anos. João tem 18 anos. Qual idade de Daniel?

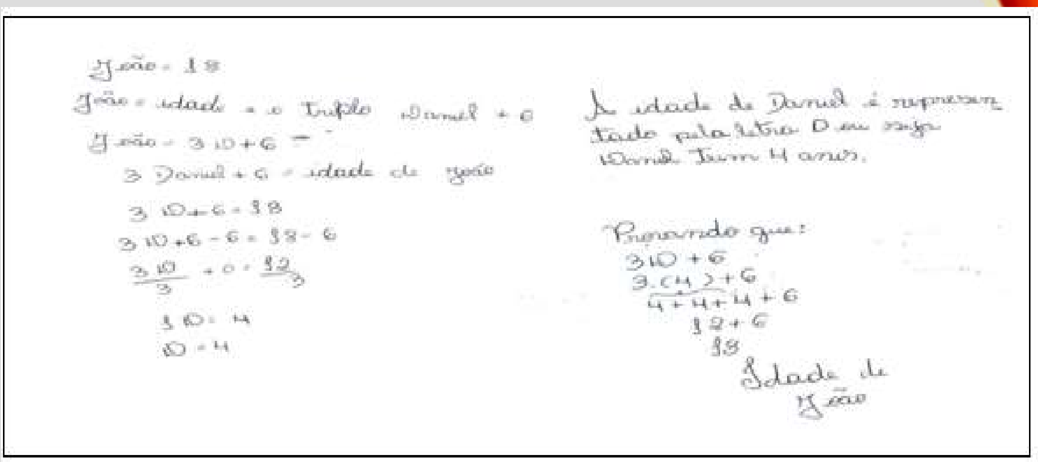
**2°) Observar o comportamento dos alunos:** Nessa etapa, deixar o estudante tentar resolver o problema sem a interferência do professor, o qual deve apenas observar o comportamento do estudante e incentiva-lo a trabalhar na resolução do problema.

**3°) Analisar o trabalho do aluno:** A observação do professor sobre o que o aluno fez, durante a tentativa de resolução do problema, buscando identificar a existência de pensamento algébrico. Para isso, o professor observa se o aluno percebeu que existe uma relação entre a idade de João e Daniel e que uma pode ser obtida da outra por operações de adição e multiplicação. Se essa percepção envolver uma generalização, ou seja, a percepção de que variando a idade de um a outra também varia sistematicamente, então o estudante teve um raciocínio dentro da primeira vertente do pensamento algébrico, aritmeticismo. Se o estudante for capaz de explicar esse processo de generalização colocando em palavras, imagem ou gestos, ele teve um pensamento algébrico contextual, dentro da segunda vertente. Se o estudante conseguir construir de maneira mais formal, isto é, usando letras ou palavras, uma relação entre a idade de Daniel e João isso indica que ele teve um pensamento dentro da terceira vertente do pensamento algébrico.

**4°) Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** Após analisar o estudante pelo que ele falou ou escreveu, buscando perceber a existência de pensamento algébrico, o professor deve focar nos estudantes que tiveram mais dificuldades, para tentar fazer emergir nesses estudantes um pensamento algébrico. Isso pode ser feito com atividades criativas que façam o aluno pensar ativamente e perceber as relações existentes no problema. Como sugestão, propomos que o professor faça, de preferência individualmente, perguntas do tipo: Daniel é mais novo que João? Se João tivesse 10 anos, qual seria a idade de Daniel? E se a idade de João fosse 15? E se fosse 20? E se fosse 25?... Se a idade de João fosse representada pela letra n, como eu escreveria a idade de Daniel usando n?

**Comentários:** Após a quarta etapa, o professor deve reavaliar a forma de pensamento dos estudantes e relacionar esses pensamentos buscando novas alternativas para aqueles que não conseguiram pensar algebricamente. Uma resolução do Problema 11, feita por uma aluna, é apresentada na Figura 19.

**Figura 19 - Resolução feira por uma Aluna**




Fonte: Dados da pesquisa

A aluna representou com a letra *D* a idade de Daniel. A maneira como essa aluna resolveu o problema, operando com o inverso aditivo ou multiplicativo, até chegar ao valor 4, valor da idade que ela estava procurando, ou seja, idade de Daniel, demonstra claramente um raciocínio algébrico. Nesse caso, apareceu as três vertentes, mas nosso foco aqui foi observar a terceira vertente que demonstra que a estudante está pronta para um trabalho mais objetivo que envolvam relações e condições de operar o desconhecido como se fosse conhecido, consequentemente, já ela conseguiu produzir significados para conceitos relacionados às equações de primeiro grau.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a construção deste trabalho, focamos principalmente na forma que o estudante pensa diante de um problema. E, a análise do professor, de forma criteriosa sobre as ações do estudante, sua forma de expressar, escrita ou falada, evidencia como ele pensa, dando condições ao professor para fazer as devidas intervenções. Introduzir qualquer conceito formal de matemática que envolvam relações entre grandezas desconhecidas sem que o estudante consiga lidar com isso, ou seja, produzir significado para esses objetos, pode estar fadado ao fracasso. Nesse sentido, o professor deve estar atendo para o que o estudante entendeu sobre cada conceito trabalhando em sua aula e, evidenciar o pensamento algébrico do estudante, observando em que vertente ele está inserido, pode ajudar nesse processo.

Esperamos que este Produto Educacional possa auxiliar professores a criarem novas propostas eficientes de ensino, fundamentadas em pesquisas e aplicações que evidenciem o pensamento do estudante, para que o professor possa fazer intervenções para produzir aprendizagem. Esperamos também, poder motivar professores a utilizar proposta como essa para construção de ferramentas pedagógicas, pois acreditamos que com a resolução de problemas, e as devidas intervenções do professor, os alunos possam desenvolver um pensamento algébrico capaz de reduzir suas dificuldades em aprender os conteúdos relacionados às equações do primeiro grau. Acreditamos também que essa Sequência Didática possa ser adaptada ou reformulada para atender as diversas necessidades que aparecem com frequência dentro da realidade de cada turma, de cada escola. Por fim, gostaríamos de se ressaltar que esta Sequência Didática é apenas uma proposta a qual poderá inspirar outros educadores e pesquisadores na busca de melhorias para o campo da Educação Matemática.

# REFERÊNCIAS


BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 7ª série/ São Paulo: Moderna, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** matemática. 2º Ed. São Paulo: Ática, 2015.

FERREIRA, N.C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; MARTINS, E. R.; ANDRADE, C. P. Construção do conhecimento matemático na perspectiva da resolução de problemas. In: PINHEIRO, J. M. L. (Ed.). **A Matemática e seu Ensino: olhares em Educação Matemática**. São Paulo: LF Editorial, 2018. p. 143–161.

KAPUT, J. **Algebra in the early grades**. LV, New York, 2008.

KAPUT, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

KOBASHIGAWA, A.H.; ATHAYDE, B.A.C.; MATOS, K.F. de OLIVEIRA; CAMELO, M.H.; FALCONI, S. Estação ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental. In: IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica. São Paulo, 2008. p. 212-217. Disponível em: <http://www.cienciamao.usp.br/dados/smm/_estacaocienciaformacaodeeducadoresparaoensinodecienciasnasseriesiniciaisdoensinofundamental.trabalho.pdf>. Acesso em: 05 de out. de 2017.

LINS, R, C. **The learning and teaching of school álgebra. Handbook of research om mathematics teaching and learning**. National Council of Theacher of Mathematics – NCTM, New York, 1992.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas, p. 73-98. In: **Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v. 25, n. 41, dez. 2011. Universidade Estadual Paulista – Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

ONUCHIC, et al,. **Resolução de Problemas:** Teoria e prática. Jundiaí, Ed. Paco, 2014.

PEREIRA et al., Carlos, **Egipto Senet**. Ed. Norprint, Belém - PA, 2008.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2009.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p.31-42.

SOUZA, Joamir Roberto. **Vontade de saber matemática**. 2º Ed. São Paulo: FTD, 2015.

$2X - 14 = 0$

$3X + 6 = 18$

$2X + 8 = 20$

$130 + 13x = 0$

$9{,}99X + 10{,}01 = 20$